

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

E. CHWALLA †-GRAZ • K. FEDERHOFER †-GRAZ • P. FUNK-WIEN  
W. GAUSTER-RALEIGH, USA. • G. HEINRICH-WIEN • A. KROMM-GRAZ  
E. MELAN-WIEN • H. MELAN †-WIEN • H. PARKUS-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

H. PARKUS-WIEN

BAND XIV, HEFT 3

MIT 70 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN 21. Oktober 1960)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1960



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5  
Tel. 63 96 14, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in mindestens einer dieser drei Sprachen vorangestellt werden, die vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen, mitzuliefern ist.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

### Band XIV, Heft 3

### Inhaltsverzeichnis

Seite

#### Originalarbeiten

W. Baumann, Beitrag zum Durchschlagsproblem kreisförmiger Bimetallplättchen. (Mit 29 Textabbildungen) .....	161
H. L. Langhaar, and A. P. Boreš, Buckling of a Cylindrical Shell Subjected to External Pressure. (With 1 Figure) .....	189
A. Kyrál, Grundlagen einer stochastischen Dauerfestigkeitstheorie. (Mit 9 Textabbildungen) .....	204
O. Bottema, Die Bahnkurven eines merkwürdigen Zwölfstabengetriebes. (Mit 4 Textabbildungen) .....	218
G. Valentin, Wärmespannungen in prismatischen Faltwerken. (Mit 27 Textabbildungen) ...	223
Persönliches .....	243

Karl Federhofer † (H. Parkus)

Buchbesprechungen .....	244
-------------------------	-----

Aas-Jakobsen, A., Die Berechnung der Zylinderschalen (R. Beer). — Duschek, A. und A. Hochrainer, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, I. Teil: Tensoralgebra, 4. Auflage (E. Bukovics). — Guldán, R., Rahmentragwerke und Durchlaufträger, 6. Auflage (W. Mudrak). — Koch, K. M. und R. Reinbach, Einführung in die Physik der Leiterwerkstoffe (H. Nowotny). — Parkus, H., Instationäre Wärmespannungen (G. Heinrich). — Penrose, H. E. und R. S. H. Boulding, Grundlagen und Praxis der Radartechnik, Band I: Prinzipien und Bauelemente, Band II: Anlagen und Wellenleitertheorie (W. Riedler). — Pflüger, A., Elementare Schalenstatik, 3. Auflage (E. Tschech) — Philippow, E., Grundlagen der Elektrotechnik, Bücherei der Hochfrequenztechnik: Band 7 (O. Franke).



# Beitrag zum Durchschlagsproblem kreisförmiger Bimetallplättchen\*

Von W. Baumann, Wien

Mit 29 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird das kreisförmige Bimetallplättchen, das durch ein Gleichgewichtssystem von vier Einzelkräften (Abb. 1) quer zu seiner Ebene vorgespannt und einer gleichmäßigen Temperaturbeanspruchung ausgesetzt ist, untersucht. Hierbei wird die von Marguerre<sup>1</sup> entwickelte Theorie der schwachgewölbten Schale mit endlichen Verschiebungen angewendet. Mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin wird eine Näherungslösung aufgestellt und numerisch ausgewertet. Das Auftreten des Durchschlageffektes wird nachgewiesen und diskutiert. Versuchsergebnisse werden vorgelegt.

## I. Einleitung

Bimetall besteht aus zwei miteinander verschweißten Schichten verschiedener Metalle, die stark unterschiedliche Temperatúrausdehnungskoeffizienten besitzen. Wird ein Plättchen aus Bimetall, das bei einer bestimmten Temperatur eben und spannungsfrei ist, gleichmäßig erwärmt oder abgekühlt, so nimmt es zufolge der verschiedenen Wärmeausdehnungen der beiden Schichten eine verwölbte Gestalt an. Dabei entspricht jeder Temperatur eine ganz bestimmte ausgebogene Lage. Anders jedoch, wenn das Plättchen vorgewölbt ist oder vor der Temperaturbeanspruchung vorgespannt wird, etwa durch ein Gleichgewichtssystem von vier gleich großen Einzelkräften, die in den Viertelpunkten des Randkreises angreifen und senkrecht zur Ebene des spannungsfreien Plättchens gerichtet sind. In diesem Fall kann es zu plötzlich auftretenden großen Formänderungen kommen. Man spricht dann vom Durchschlagen oder Schnappen des Plättchens.

Das kugelförmig gewölbte, nicht vorgespannte Bimetallplättchen wurde von Panov<sup>2</sup> und Wittrick<sup>3</sup> behandelt. In der vorliegenden Arbeit soll das nach Abb. 1 vorgespannte, im spannungsfreien Zustand eben oder zylindrisch vorgewölbte Bimetallplättchen behandelt werden. Es werden im Thermostatenbau beide Arten von Plättchen verwendet, wobei die vorgespannten gegenüber den nicht vorgespannten gewisse praktische Vorzüge besitzen.

Das Schnappen des Plättchens tritt bei zwei bestimmten Temperaturen, der oberen Schnapptemperatur  $T_o$  und der unteren Schnapptemperatur  $T_u$  ( $T_o > T_u$ ), ein, je

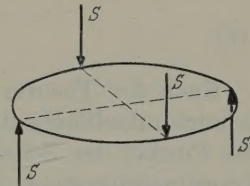


Abb. 1

\* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Wien genehmigten Dissertation. Referenten: Prof. Dr. H. Parkus und Prof. Dr. G. Heinrich.

<sup>1</sup> K. Marguerre: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderungen. Proceedings of the 5th Int. Congr. of Appl. Mech., 1938.

<sup>2</sup> D. V. Panov: On the stability of a bimetallic membrane on heating. Prikl. Mat. i Mek. 11 (1947); (in Russisch).

<sup>3</sup> W. H. Wittrick: Stability of a bimetallic disk. Quart. Mech. Appl. Math. 6 (1951).



nachdem das Plättchen erwärmt oder abgekühlt wird. Der Mittelpunkt des Plättchens befindet sich vor und nach dem Durchschlagen auf verschiedenen Seiten der senkrecht zur Krafrichtung stehenden Ebene  $A - A$ , von der die Kraftangriffspunkte den gleichen absoluten Abstand besitzen (Abb. 2). Das Plättchen schnappt also, bei festgehaltenen Kraftangriffspunkten, bei der Temperatur  $T_o$  in der einen Richtung und bei der Temperatur  $T_u$  in der entgegengesetzten Richtung.

Unter dem Schnappintervall versteht man den Ausdruck  $\Delta T = T_o - T_u$ , während  $T^* = 1/2 (T_o + T_u)$  als Haupttemperatur bezeichnet wird.

Die beiden Materialschichten eines Bimetalls werden nach Abb. 3 als Schicht 1 und Schicht 2 bezeichnet. Das Material der Schicht 1 besitzt den Elastizitätsmodul  $E_1$ , den Schubmodul  $G_1$ , den linearen Temperaturausdehnungskoeffizienten  $(\alpha_T)_1$  und

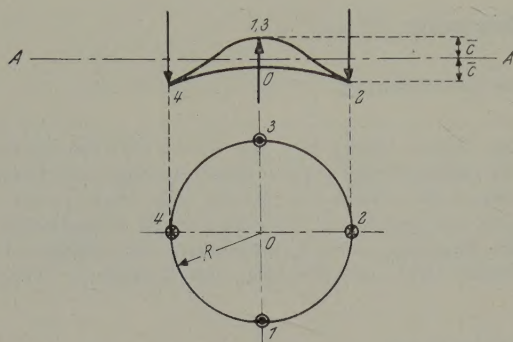


Abb. 2



Abb. 3

die konstante Dicke  $t_1$ , das Material der Schicht 2 die entsprechenden Werte  $E_2, G_2, (\alpha_T)_2$  und  $t_2$ . Die Gesamtdicke des Bimetallplättchens ist  $t$ , der Außenradius  $R$ . Es wird vorausgesetzt, daß die Querdehnungszahl  $\nu$  beider Materialien gleich ist ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ), daß  $(\alpha_T)_2$  größer als  $(\alpha_T)_1$  ist und daß alle Materialkonstanten unabhängig von der Temperatur sind.

Die gemeinsame Fläche der beiden Schichten wird Mittelfläche genannt.

## II. Grundgleichungen

Nach der Theorie der schwachgewölbten Schale stimmt die innere Geometrie der Schalenmittelfläche näherungsweise mit der euklidischen Geometrie der Ebene überein. Die Punkte der Schalenmittelfläche sollen im weiteren auf ein ebenes, krummliniges Koordinatensystem  $(\theta^1, \theta^2)$  bezogen werden. Die erste Grundform der Mittelfläche und gleichzeitig der Bezugsebene lautet

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Die Vorverwölbung der Mittelfläche wird durch den Abstand  $w_0 = w_0(\theta^1, \theta^2)$  von der Bezugsebene beschrieben. Als Bezugsebene wird die mit dem Mittelpunkt des Plättchens fest verbunden gedachte Ebene, die normal zu den Vorspannkräften steht, verwendet. Die kovarianten Verschiebungs Koordinaten eines Punktes der Mittelfläche der schwachgewölbten Schale bzw. des vorgewölbten Plättchens werden mit  $v_\alpha, v_3$  bezeichnet.

Der Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche lautet

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha + w|_\alpha w|_\beta - w_0|_\alpha w_0|_\beta), \quad (1)$$

wobei  $v_3 = w - w_0$  gesetzt wurde. Der vertikale Strich bedeutet kovariante Ableitung nach  $\theta^\alpha$ . Für den Verzerrungstensor in einem beliebigen Punkt der Schale erhält man



mit

$$\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \zeta \omega_{\alpha\beta} \quad (2)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -v_3|_{\alpha\beta} = -(w - w_0)|_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

wenn  $\zeta$  die Koordinate normal zur Schalenmittelfläche bedeutet. Die Orientierung von  $\zeta$  ist so festgelegt, daß den Punkten der Schicht 1 ein positiver, den Punkten der Schicht 2 ein negativer Wert von  $\zeta$  zukommt.

Die Querschubverzerrungen und die senkrecht zur Mittelfläche wirkenden Normalspannungen werden vernachlässigt.

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes lautet der Spannungstensor in einem beliebigen Punkt des Plättchens

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta} &= 2G \left( a^{\alpha\kappa} a^{\beta\lambda} \gamma_{\kappa\lambda} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\kappa\lambda} \gamma_{\kappa\lambda} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T a^{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{2}{1-\nu} G [H^{\alpha\beta\kappa\lambda} (\bar{\gamma}_{\kappa\lambda} + \zeta \omega_{\kappa\lambda}) - (1+\nu) \alpha_T T a^{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (4)$$

mit

$$H^{\alpha\beta\kappa\lambda} = a^{\alpha\kappa} a^{\beta\lambda} + \nu (a^{\alpha\beta} a^{\kappa\lambda} - a^{\alpha\lambda} a^{\beta\kappa}).$$

Es bedeuten  $a^{\alpha\beta}$  die kontravarianten Koordinaten des Maßtensors und  $T$  die Temperaturzunahme gegenüber einem isothermen Ausgangszustand. Im folgenden wird angenommen, daß  $T$  im Bereich des gesamten Plättchens konstant ist und daß für  $T=0$  im nicht vorgespannten Zustand stets eine spannungsfreie Lage existiert. Der Schubmodul  $G$  und der lineare Temperatúrausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$  sind mit den Indizes 1 oder 2 behaftet zu denken, je nachdem der betrachtete Punkt der Schicht 1 oder 2 angehört.

Resultierende Schnittgrößen werden durch

$$\left. \begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= \int_{\zeta} \tau^{\alpha\beta} d\zeta \\ m^{\alpha\beta} &= \int_{\zeta} \tau^{\alpha\beta} \zeta d\zeta \\ q^{\alpha} &= \int_{\zeta} \tau^3{}^{\alpha} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

eingeführt. Nach Ausführung der Integration über  $\zeta$  folgt

$$n^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\kappa\lambda} (B \bar{\gamma}_{\kappa\lambda} + C \omega_{\kappa\lambda}) - P T a^{\alpha\beta} \quad (6)$$

$$m^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\kappa\lambda} (D \omega_{\kappa\lambda} + C \bar{\gamma}_{\kappa\lambda}) - Q T a^{\alpha\beta} \quad (7)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{2}{1-\nu} (G_1 t_1 + G_2 t_2) \\ C &= \frac{1}{1-\nu} (G_1 t_1^2 + G_2 t_2^2) \\ D &= \frac{2}{3(1-\nu)} (G_1 t_1^3 + G_2 t_2^3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P &= 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} [G_1 (\alpha_T)_1 t_1 + G_2 (\alpha_T)_2 t_2] \\ Q &= \frac{1+\nu}{1-\nu} [G_1 (\alpha_T)_1 t_1^2 + G_2 (\alpha_T)_2 t_2^2] \end{aligned} \quad (8)$$

Aus Gleichung (1) erhält man nach Elimination von  $v_a$  die Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} [\bar{\gamma}_{\alpha\beta}|_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} (w|_{\alpha\lambda} w|_{\beta\kappa} - w_0|_{\alpha\lambda} w_0|_{\beta\kappa})] = 0. \quad (9)$$

Die Koordinaten des  $\varepsilon$ -Tensors lauten  $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$ ,  $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det } a_{\alpha\beta}}}$ . Mit Hilfe der Gleichungen (6), die, nach  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  aufgelöst, mit

$$\bar{H}_{\alpha\beta\mu\varrho} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\varrho} - \nu (a_{\alpha\beta} a_{\mu\varrho} - a_{\alpha\varrho} a_{\beta\mu})$$

die folgende Gestalt annehmen

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{B(1-\nu^2)} \bar{H}_{\alpha\beta\mu\varrho} n^{\mu\varrho} - \frac{C}{B} \omega_{\alpha\beta} + \frac{P}{B(1+\nu)} T a_{\alpha\beta}, \quad (6a)$$

kann für (9) geschrieben werden:

$$\varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} \left[ \frac{1}{B(1-\nu^2)} \bar{H}_{\alpha\beta\mu\varrho} n^{\mu\varrho} |_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} (w|_{\alpha\lambda} w|_{\beta\kappa} - w_0|_{\alpha\lambda} w_0|_{\beta\kappa}) \right] = 0. \quad (9a)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement lauten

$$n^{\alpha\beta}|_{\alpha} = 0 \quad (10)$$

$$q^{\kappa}|_{\kappa} + n^{\alpha\beta} w|_{\alpha\beta} + p = 0 \quad (11)$$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha} - q^{\beta} = 0. \quad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt mit  $p=0$  durch Elimination von  $q^{\beta}$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} w|_{\alpha\beta} = 0. \quad (13)$$

Setzt man den aus (6) und (7) folgenden Ausdruck

$$m^{\alpha\beta} = \frac{C}{B} n^{\alpha\beta} + \left(D - \frac{C^2}{B}\right) H^{\alpha\beta\kappa\lambda} \omega_{\kappa\lambda} + \left(\frac{CP}{B} - Q\right) T a^{\alpha\beta} \quad (14)$$

in Gleichung (13) ein, so erhält man

$$\left(D - \frac{C^2}{B}\right) H^{\alpha\beta\kappa\lambda} \omega_{\alpha\beta}|_{\kappa\lambda} + n^{\alpha\beta} w|_{\alpha\beta} = 0. \quad (15)$$

Führt man mit

$$n^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} \Phi |_{\kappa\lambda} \quad (16)$$

die Airysche Spannungsfunktion  $\Phi$  ein, so sind die Gleichungen (10) identisch erfüllt, und es verbleiben nur noch die beiden Gleichungen (15) und (9a) für die Funktionen  $w$  und  $\Phi$ , die dann wie folgt lauten<sup>4</sup>:

$$-\left(D - \frac{C^2}{B}\right) (w - w_0)|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} w|_{\alpha\beta} \Phi |_{\kappa\lambda} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{2}{(1-\nu^2)B} \Phi |_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} (w|_{\alpha\beta} w|_{\kappa\lambda} - w_0|_{\alpha\beta} w_0|_{\kappa\lambda}) = 0. \quad (18)$$

Die vier dynamischen Randbedingungen lauten

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} &= m^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} \\ \bar{n}_3 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} &= m^{\alpha\beta} |_{\beta} u_{\alpha} + n^{\alpha\beta} w|_{\beta} u_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial s} (m^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\varrho} u_{\beta} u^{\varrho}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\bar{n}^{\alpha} = n^{\alpha\beta} u_{\beta}. \quad (20)$$

Die längs der Berandung angreifenden resultierenden Schnittgrößen sind durch einen Querstrich gekennzeichnet.  $\bar{G}$  ist der Wert der Tangential- und  $\bar{H}$  der Wert der Normalkomponente des Randmomentenvektors.  $u_{\alpha}$  bzw.  $u^{\alpha}$  sind die Koordinaten des Einheitsvektors in Richtung der Randnormalen.

<sup>4</sup> Th. v. Kármán: Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, Bd. 4, Heft 27, S. 350.



Unter Verwendung dimensionsloser Koordinaten und dimensionsloser Ausdrücke für Durchbiegung, Bogenlänge, Spannungsfunktion und Temperatur:

$$W = \frac{w}{R}, \quad W_0 = \frac{w_0}{R}, \quad s^* = \frac{s}{R} \quad (21)$$

$$F = \frac{\Phi}{D - \frac{C^2}{B}} \quad (22)$$

$$\vartheta = \frac{CP - BQ}{BD - C^2} R T \quad (23)$$

sowie der dimensionslosen Konstanten

$$k = \frac{1 - \nu^2}{2} \frac{B^2 R^2}{BD - C^2}, \quad (24)$$

die Plattenkennziffer genannt wird, erhält man für Differentialgleichungen und Randbedingungen in dimensionsloser Form

$$(W - W_0)|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} W|_{\alpha\beta} F|_{\kappa\lambda} = 0 \quad (17a)$$

$$F|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} + k \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} (W|_{\alpha\beta} W|_{\kappa\lambda} - W_0|_{\alpha\beta} W_0|_{\kappa\lambda}) = 0 \quad (18a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{G}}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R}} &= -H^{\alpha\beta\kappa\lambda} (W - W_0)|_{\kappa\lambda} u_\alpha u_\beta + \vartheta u^\alpha u_\alpha + \frac{C}{BR} \frac{\bar{n}^\alpha}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R^2}} u_\alpha \\ \frac{\bar{n}^\alpha - \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R^2}} &= -H^{\alpha\beta\kappa\lambda} \left[ (W - W_0)|_{\kappa\lambda\beta} u_\alpha - \frac{\partial}{\partial s^*} (W - W_0)|_{\kappa\lambda} \varepsilon_{\alpha\varrho} u_\beta u^\varrho \right] + \\ &+ \frac{\bar{n}^\alpha}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R^2}} W|_{\alpha} - \frac{C}{BR} \frac{\frac{\partial \bar{n}^\alpha}{\partial s^*}}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R^2}} \varepsilon_{\alpha\varrho} u^\varrho \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

$$\frac{\bar{n}^\alpha}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R^2}} = \varepsilon^{\alpha\kappa} \varepsilon^{\beta\lambda} F|_{\kappa\lambda} u_\beta. \quad (20a)$$

Führt man schließlich dimensionslose ebene Polarkoordinaten  $(\eta = \frac{r}{R}, \varphi)$  ein, so lauten die Gleichungen (17a) und (18a)

$$\begin{aligned} -\Delta \Delta (W - W_0) + \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - 2 \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F + 2k \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W_0}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial W_0}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (18b)$$

Die zugehörigen Randbedingungen des kreisförmigen Plättchens für den vorliegenden Belastungsfall (Abb. 1) erhält man aus (19a) und (20a), wenn man die Vorspannkkräfte  $S$  längs des Randes in eine Fourier-Reihe entwickelt und den dimensionslosen Ausdruck

$$K = \frac{4}{\pi} \frac{S}{\left(D - \frac{C^2}{B}\right) \frac{1}{R}} \quad (25)$$

verwendet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \eta^2} + \nu \left[ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \eta} \right] &= \vartheta \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta (W - W_0) - (1 - \nu) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \varphi} \right] &= K \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \cos 2n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

wobei die Bedingungen (20b) durch die folgenden ersetzt werden können<sup>5</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20c)$$

Die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen (17b) und (18b) sind von vierter Ordnung, nichtlinear und homogen. Die Randbedingungen (19b) für  $W$  sind linear und inhomogen, die Randbedingungen (20c) für  $F$  linear und homogen.

### III. Aufstellung einer Näherungslösung

Zur Aufstellung einer Näherungslösung für (17b) und (18b) wird das Verfahren von Galerkin angewendet. Schreibt man zur Abkürzung für (17b) und (18b)

$$\left. \begin{aligned} D_1 [W(\eta, \varphi), F(\eta, \varphi)] &= 0 \\ D_2 [F(\eta, \varphi), W(\eta, \varphi)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

und macht die Näherungsansätze

$$\bar{W} = \bar{W}^* + \bar{W}_1 = \bar{W}^* + \sum_{n=0,1,2}^{\bar{n}} \sum_{m=1,2,3}^{\bar{m}} a_{m,n} \Phi_{m,n}(\eta, \varphi) \quad (27)$$

$$\bar{F} = \sum_{n=0,1,2}^{\bar{n}} \sum_{m=1,2,3}^{\bar{m}} b_{m,n} \Psi_{m,n}(\eta, \varphi), \quad (28)$$

so können nach dem Verfahren von Galerkin die folgenden Orthogonalitätsbedingungen zur Berechnung der Konstanten  $a_{m,n}$  und  $b_{m,n}$  aufgestellt werden:

$$\int_{\eta} \int_{\varphi} D_1(\bar{W}, \bar{F}) \Phi_{m,n} \eta d\eta d\varphi = 0 \quad (m = 1, 2, 3 \dots \bar{m}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \bar{n}) \quad (29)$$

$$\int_{\eta} \int_{\varphi} D_2(\bar{F}, \bar{W}) \Psi_{m,n} \eta d\eta d\varphi = 0. \quad (m = 1, 2, 3 \dots \bar{m}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \bar{n}) \quad (30)$$

Hierbei haben  $\bar{W}^*$  die inhomogenen Randbedingungen (19b),  $\bar{W}_1$  dagegen gliedweise die zugehörigen homogenen Randbedingungen zu befriedigen.  $\bar{F}$  hat gliedweise (20c) zu erfüllen.  $\bar{W}$  und  $\bar{F}$  erfüllen somit sämtliche für  $W$  und  $F$  geltenden Randbedingungen.

<sup>5</sup> K. Girkmann: Flächentragwerke, 5 Aufl. Wien: Springer-Verlag. 1959.



Setzt man

$$\bar{W}^* = W_0 + \theta \eta^2 + \sum_{n=1,3,5}^{\bar{n}} \eta^{2n} (h_n + \bar{h}_n \eta^2) \cos 2n\varphi, \quad (31)$$

so liefern die inhomogenen Randbedingungen (19b):

$$\begin{aligned} \bar{W}^* &= W_0 + \frac{\theta}{2(1+\nu)} \eta^2 + \\ &+ K \sum_{n=1,3,5}^{\bar{n}} \frac{1}{4(3+\nu)n(2n+1)} \eta^{2n} \left( \frac{2(2n+1) + (1-\nu)(2n^2-n-1)}{(1-\nu)n(2n-1)} - \eta^2 \right) \cos 2n\varphi. \end{aligned} \quad (31a)$$

Für  $\Phi_{m,n}$  und  $\Psi_{m,n}$  werden die folgenden Ansätze gemacht:

$$\Phi_{m,n} = \eta^{2m} (f_{m,n} + \bar{f}_{m,n} \eta^2 + \eta^4) \cos 2n\varphi \quad (32)$$

$$\Psi_{m,n} = \eta^{2m} (1 + g_{m,n} \eta^2 + \bar{g}_{m,n} \eta^4) \cos 2n\varphi \quad (33)$$

bzw.

$$\bar{W} = \bar{W}^* + \sum_{n=0,1,2}^{\bar{n}} \sum_{m=1,2,3}^{\bar{m}} a_{m,n} \eta^{2m} (f_{m,n} + \bar{f}_{m,n} \eta^2 + \eta^4) \cos 2n\varphi \quad (27a)$$

$$\bar{F} = \sum_{n=0,1,2}^{\bar{n}} \sum_{m=1,2,3}^{\bar{m}} b_{m,n} \eta^{2m} (1 + g_{m,n} \eta^2 + \bar{g}_{m,n} \eta^4) \cos 2n\varphi. \quad (28a)$$

Gleichungen (27a) und (28a) stellen für  $\bar{W}$  und  $\bar{F}$  ein vollständiges Funktionensystem dar, wenn die Doppelsummen bis ins Unendliche erstreckt werden.

Die Randbedingungen für  $\Phi_{m,n}$  und  $\Psi_{m,n}$  lauten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{m,n}}{\partial \eta^2} + \nu \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \Phi_{m,n}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Phi_{m,n}}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta \Phi_{m,n} - (1-\nu) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \Phi_{m,n}}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \Phi_{m,n}}{\partial \varphi} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{m,n}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_{m,n}}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Aus (34) folgt mit (32) für  $f_{m,n}$  und  $\bar{f}_{m,n}$

$$\begin{aligned} f_{m,n} &= \\ &= \left. \begin{aligned} &\frac{(2m+2) [(2m+4)^2 - 4n^2] - (1-\nu)(2m+3)4n^2}{(2m+2)(2m-1) + \nu(2m-4n^2)} && \frac{(2m+2)(2m+1) + \nu(2m+2-4n^2)}{(2m+2)[(2m+4)^2 - 4n^2] - (1-\nu)(2m+3)4n^2} \\ &\frac{(2m+2)(2m-1) + \nu(2m-4n^2)}{-(2m-2)(4m^2-4n^2) + (1-\nu)(2m-1)4n^2} && \frac{(2m+2)(2m+1) + \nu(2m+2-4n^2)}{-2m[(2m+2)^2 - 4n^2] + (1-\nu)(2m+1)4n^2} \end{aligned} \right\} \quad (36) \\ \bar{f}_{m,n} &= \\ &= \left. \begin{aligned} &\frac{2m(2m-1) + \nu(2m-4n^2)}{-(2m-2)(4m^2-4n^2) + (1-\nu)(2m-1)4n^2} && \frac{-(2m+4)(2m+3) - \nu(2m+4-4n^2)}{(2m+2)[(2m+4)^2 - 4n^2] - (1-\nu)(2m+3)4n^2} \\ &\frac{2m(2m-1) + \nu(2m-4n^2)}{-(2m-2)(4m^2-4n^2) + (1-\nu)(2m-1)4n^2} && \frac{(2m+2)(2m+1) + \nu(2m+2-4n^2)}{-2m[(2m+2)^2 - 4n^2] + (1-\nu)(2m+1)4n^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Aus (35) folgt mit (33) für  $g_{m,n}$  und  $\bar{g}_{m,n}$

$$\left. \begin{aligned} 2m + (2m+2)g_{m,n} + (2m+4)\bar{g}_{m,n} &= 0 \\ -2n(1 + g_{m,n} + \bar{g}_{m,n}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Für  $n \neq 0$  erhält man hieraus die von  $m$  und  $n$  unabhängigen Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} g_{m,n} &= -2 \\ \bar{g}_{m,n} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (37a)$$

Für  $n=0$  ist die zweite Gleichung (37) identisch erfüllt.

$$\left. \begin{aligned} \text{Setzt man} \quad \bar{g}_{m,0} &= 0, \\ \text{so erhält man} \quad g_{m,0} &= -\frac{m}{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (37b)$$

Aus (27a) folgt für  $\bar{m}=1$  und  $\bar{n}=1$  mit der Querdehnungszahl  $\nu=0,3$

$$\begin{aligned} \bar{W} &= W_0 + 0,384615 \vartheta \eta^2 + K (0,216450 \eta^2 - 0,025 \dots \eta^4) \cos 2\varphi + \\ &+ a_{1,0} (10,6154 \eta^2 - 4,5 \eta^4 + \eta^6) + a_{1,1} (16,0649 \eta^2 - 4,42 \dots \eta^4 + \eta^6) \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (27b)$$

Im weiteren soll nur eine zylindrische Vorverwölbung von der Form

$$W_0 = h \eta^2 (\cos 2\varphi - 1) \quad (38)$$

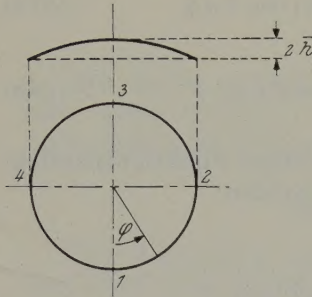


Abb. 4

betrachtet werden mit  $h = \frac{\bar{h}}{R}$  (Abb. 4). Der Winkel  $\varphi$  wird vom Punkt 1 an im negativen Uhrzeigersinn positiv gezählt.

Da in der praktischen Ausführung der Vorspannweg und nicht die Vorspannkraft konstant gehalten wird, erscheint es zweckmäßig, in der Berechnung die Vorspannkraft durch den Vorspannweg zu ersetzen. Wegen

$$c = \frac{\bar{c}}{R} = \frac{1}{2} \left[ (\bar{W} - W_0)_{\eta=1} - (\bar{W} - W_0)_{\eta=1} \right] \quad (39)$$

erhält man somit aus (27b) unter Beachtung von (38) für  $\bar{W}$  den Ansatz

$$\begin{aligned} \bar{W} &= -h \eta^2 + \theta \eta^2 + a_{1,0} (\alpha_1 \eta^2 + \alpha_2 \eta^4 + \eta^6) + \\ &+ [h \eta^2 + c (\xi_1 \eta^2 + \xi_2 \eta^4) + a_{1,1} (\beta_1 \eta^2 + \beta_2 \eta^4 + \eta^6)] \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (27c)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0,384615 \vartheta & \alpha_1 &= 10,6154 & \xi_1 &= 1,132075 & \beta_1 &= 1,75472 \\ & & \alpha_2 &= -4,5 & \xi_2 &= -0,132075 & \beta_2 &= -2,75472. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Für  $\bar{F}$  wird nach Gleichung (28a) unter Beachtung von (37a) und (37b) der folgende Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= b_{1,0} (\eta^2 - \frac{1}{2} \eta^4) + b_{2,0} (\eta^4 - \frac{2}{3} \eta^6) + b_{3,0} (\eta^6 - \frac{3}{4} \eta^8) + b_{4,0} (\eta^8 - \frac{4}{5} \eta^{10}) + \\ &+ b_{1,1} (\eta^2 - 2 \eta^4 + \eta^6) \cos 2\varphi + b_{2,2} (\eta^4 - 2 \eta^6 + \eta^8) \cos 4\varphi. \end{aligned} \quad (28b)$$

Als nächstes werden die Ansätze (27c) und (28b) in die Gleichungen (29) und (30) eingesetzt und sämtliche Integrationen ausgeführt. Die aus (29) folgenden beiden Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} &-168,369 a_{1,0} + \\ &+ 4,67692 h b_{1,0} + 4,27692 h b_{2,0} + 3,62637 h b_{3,0} + 3,09011 h b_{4,0} - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -1,79882 \vartheta b_{1,0} - 1,64497 \vartheta b_{2,0} - 1,39476 \vartheta b_{3,0} - 1,18850 \vartheta b_{4,0} - \\
& -34,0276 a_{1,0} b_{1,0} - 28,2781 a_{1,0} b_{2,0} - 22,4502 a_{1,0} b_{3,0} - 18,2489 a_{1,0} b_{4,0} + \\
& + 0,400000 h b_{1,1} + 0,268652 c b_{1,1} - 1,49453 a_{1,1} b_{1,1} = 0
\end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& -18,4755 a_{1,1} + \\
& + 0,384906 h b_{1,0} + 0,100629 h b_{2,0} - 0,0571429 h b_{3,0} - 0,133693 h b_{4,0} + \\
& + 0,369455 c b_{1,0} + 0,0514062 c b_{2,0} - 0,115847 c b_{3,0} - 0,192409 c b_{4,0} - \\
& - 0,214793 a_{1,1} b_{1,0} - 0,543987 a_{1,1} b_{2,0} - 0,599424 a_{1,1} b_{3,0} - 0,566487 a_{1,1} b_{4,0} + \\
& + 0,568553 h b_{1,1} - 0,218674 \vartheta b_{1,1} - 2,98905 a_{1,0} b_{1,1} - \\
& - 0,0380951 h b_{2,2} - 0,0090575 c b_{2,2} + 0,304053 a_{1,1} b_{2,2} = 0.
\end{aligned} \quad (42)$$

Die aus (30) folgenden Gleichungen lauten, wenn man sie nach  $b_{1,0}$ ,  $b_{2,0}$ , ... auflöst:

$$\left. \begin{aligned}
b_{1,0} &= k (0,0369 \vartheta^2 - 0,192 h \vartheta - 0,531 h c - 0,284 c^2 - 4,03 h a_{1,0} + \\
& + 1,55 \vartheta a_{1,0} + 16,92 a_{1,0}^2 - 0,353 h a_{1,1} - 0,377 c a_{1,1} - 0,129 a_{1,1}^2) \\
b_{2,0} &= k ( \quad \quad \quad + 0,013 h c + 0,0170 c^2 + 0,615 h a_{1,0} - \\
& - 0,237 \vartheta a_{1,0} - 5,412 a_{1,0}^2 + 0,263 h a_{1,1} + 0,309 c a_{1,1} + 0,3013 a_{1,1}^2) \\
b_{3,0} &= k ( \quad \quad \quad - 0,083 h a_{1,1} + \\
& + 0,0321 \vartheta a_{1,0} + 1,449 a_{1,0}^2 - 0,0553 h a_{1,1} - 0,0744 c a_{1,1} - 0,1742 a_{1,1}^2) \\
b_{4,0} &= k ( \quad \quad \quad - 0,189 a_{1,0}^2 \quad \quad \quad + 0,0353 a_{1,1}^2) \\
b_{1,1} &= k (-0,01651 h c + 0,006350 c \vartheta - 0,2500 h a_{1,0} - 0,1679 c a_{1,0} - \\
& - 0,1777 h a_{1,1} + 0,06834 \vartheta a_{1,1} + 0,9341 a_{1,0} a_{1,1}) \\
b_{2,2} &= k (-0,0006541 c^2 + 0,01667 h a_{1,1} + 0,003963 c a_{1,1} - 0,06651 a_{1,1}^2).
\end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Setzt man die Gleichungen (43) in (41) und (42) ein und transformiert den Temperaturwert  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \vartheta^* + 2,6 h, \quad (44)$$

so erhält man schließlich für  $a_{1,0}$  und  $a_{1,1}$  zwei gekoppelte Gleichungen dritten Grades, die die Grundlage für die folgende numerische Auswertung bilden.

$$\begin{aligned}
& a_{1,0}^3 + 0,155 \vartheta^* a_{1,0}^2 + \left[ 0,00500 a_{1,1}^2 - (0,0145 h + 0,0139 c) a_{1,1} - \right. \\
& - 0,0187 h^2 - 0,0390 h c - 0,0202 c^2 + 0,3727 \frac{1}{k} + 0,00819 (\vartheta^*)^2 \left. \right] a_{1,0} + \\
& + [0,000365 a_{1,1}^2 - (0,000679 h + 0,000625 c) a_{1,1} - 0,000994 h^2 - \\
& - 0,00207 h c - 0,001073 c^2 + 0,000147 (\vartheta^*)^2] \vartheta^* = 0.
\end{aligned} \quad (41a)$$

$$\begin{aligned}
& a_{1,1}^3 + (0,565 h + 0,826 c) a_{1,1}^2 + \left[ 58,94 a_{1,0}^2 + 0,754 h^2 + \right. \\
& + 1,576 h c + 0,878 c^2 + 256,6 \frac{1}{k} + 8,77 \vartheta^* a_{1,0} + 0,3176 (\vartheta^*)^2 \left. \right] a_{1,1} - \\
& - (92,46 h + 88,10 c) a_{1,0}^2 + 1,33 h^3 + 4,09 h^2 c + 4,19 h c^2 + 1,44 c^3 - \\
& - (8,69 h + 7,99 c) \vartheta^* a_{1,0} - (0,197 h + 0,170 c) (\vartheta^*)^2 = 0.
\end{aligned} \quad (42a)$$

In den Gleichungen (41a) und (42a) treten die drei Parameter  $c$ ,  $h$  und  $k$  auf. Es gelingt, die Zahl der Parameter um eins zu verringern, wenn man die beiden Gleichungen durch  $c^3$  — vorausgesetzt  $c \neq 0$  — oder durch  $h^3$  — vorausgesetzt  $h \neq 0$  — dividiert. An Stelle von  $a_{1,0}$ ,  $a_{1,1}$  und  $\vartheta^*$  treten dann  $\frac{a_{1,0}}{c}$ ,  $\frac{a_{1,1}}{c}$  und  $\frac{\vartheta^*}{c}$  bzw.  $\frac{a_{1,0}}{h}$ ,  $\frac{a_{1,1}}{h}$  und  $\frac{\vartheta^*}{h}$ . Die beiden verbleibenden Parameter lauten  $k c^2$  und  $h/c$  bzw.  $k h^2$  und  $c/h$ .

#### IV. Numerische Auswertung der Näherungslösung.

##### Versuchsergebnisse

Die nun folgende numerische Auswertung ist in erster Linie auf den Nachweis des Schnappeffektes und auf die damit in Zusammenhang stehenden Probleme ausgerichtet. Die Spannungen und die Verzerrungsenergie werden nur in zweiter Linie im letzten Abschnitt behandelt.

Der jeweilige Verschiebungszustand eines Plättchens soll durch den (auf den Radius bezogenen) Abstand  $W_m$  des Plättchenmittelpunktes von der zur Krafttrichtung senkrecht stehenden Ebene  $A-A$  (vgl. Abb. 2), von der die vier Kraftangriffspunkte gleichen absoluten Abstand besitzen, charakterisiert werden. Die Größe  $W_m$  wird mittlere Durchbiegung genannt. Sie stellt, da dem Mittelpunkt nach getroffener Festlegung die Durchbiegung Null zukommt, die mittlere (auf den Radius bezogene) Randdurchbiegung dar.

Aus Gleichung (27c) ergibt sich

$$W_m = -h + \theta + a_{1,0} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)$$

oder

$$W_m = 0,3846 \vartheta^* + 7,115 a_{1,0}. \quad (45)$$

Es sei in diesem Zusammenhang auf die folgenden Festlegungen hingewiesen: Die Schicht 1 mit dem kleineren Temperatúrausdehnungskoeffizienten  $(\alpha_T)_1$  befindet sich „oben“, wenn die  $\zeta$ -Achse nach oben weist. Die Durchbiegung wird nach oben positiv gezählt. Der Mittelpunkt des Plättchens liegt für einen positiven Wert von  $W_m$  unterhalb der Ebene  $A-A$ . Die Vorspannkraft wirkt in den beiden Punkten ( $\eta=1$ ,  $\varphi=0$ ) und ( $\eta=1$ ,  $\varphi=\pi$ ) nach oben und die Erzeugenden der zylindrischen Vorverwölbung (38) sind parallel zur Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte gerichtet.

Wie man sich leicht an Hand der Gleichungen (41a) und (42a) überzeugt, ist  $W_m$  eine schiefssymmetrische Funktion von  $\vartheta^*$ :

$$W_m(\vartheta^*) = -W_m(-\vartheta^*), \quad (46)$$

was ganz allgemein für jeden Wert von  $c$ ,  $h$  und  $k$  gilt.

Der in der Einleitung definierten Haupttemperatur  $T^*$  entspricht der Temperaturwert  $\vartheta = 2,6 h$ . Mit (23) folgt daraus, daß die Haupttemperatur der Vorverwölbung ( $h$ ) proportional und unabhängig von der Vorspannung ( $c$ ) ist.

Bevor näher auf die Auswertung von (41a) und (42a) eingegangen wird, sollen noch die beiden dimensionslosen Größen  $k$  und  $\vartheta$  etwas genauer untersucht werden. Mit Hilfe von (24), (23) und (8) kann für  $k$  und  $\vartheta$  geschrieben werden:

$$k = 6(1-\nu^2) \frac{(1+\chi\psi)^2(1+\psi)^2}{1+\chi^2\psi^4+2\chi\psi(2+3\psi+2\psi^2)} \left(\frac{R}{t}\right)^2 \quad (24a)$$

$$\vartheta = 1,5(1+\nu) \frac{4\chi\psi(1+\psi)^2}{1+\chi^2\psi^4+2\chi\psi(2+3\psi+2\psi^2)} \frac{R}{t} [(\alpha_T)_2 - (\alpha_T)_1] T \quad (23a)$$

mit

$$\chi = \frac{G_1}{G_2} \text{ und } \psi = \frac{t_1}{t_2}. \quad (47)$$



In den Abb. 5 und 6 ist der Einfluß von  $\chi$  und  $\psi$  auf  $k$  und  $\vartheta$  dargestellt. Man sieht, daß  $k$  mit  $\chi$  und  $\psi$  nur schwach veränderlich ist. Für den Regelfall gleicher Schichtdicken ( $\psi = 1$ ) ist die Abhängigkeit überhaupt vernachlässigbar.  $\vartheta$  ist für  $\psi = 1$  gleichfalls nur schwach veränderlich, was dagegen nicht mehr für  $\psi = 1/2$  oder  $\psi = 2$  zutrifft.

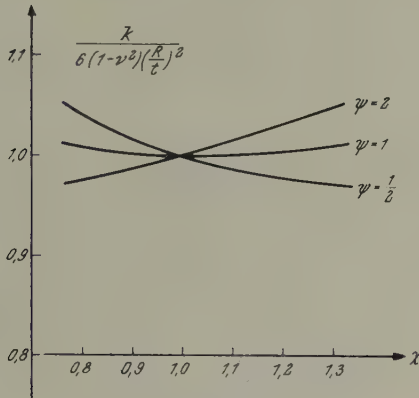


Abb. 5

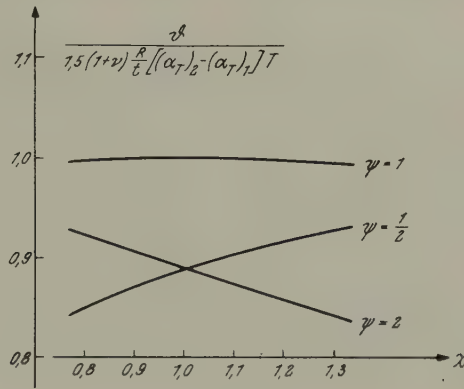


Abb. 6

Schließt man fürs erste den Fall  $c = 0$  aus, so kann man sich der durch  $c^3$  dividierten Gleichungen (41a) und (42a) bedienen, die wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)^3 + 0,155 \frac{\vartheta^*}{c} \left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)^2 + \left[0,005500 \left(\frac{a_{1,1}}{c}\right)^2 - \left(0,0145 \frac{h}{c} + 0,0139\right) \frac{a_{1,1}}{c} - \right. \\ & \quad \left. - 0,0187 \left(\frac{h}{c}\right)^2 - 0,0390 \frac{h}{c} - 0,0202 + 0,3727 \frac{1}{kc^2} + 0,00819 \left(\frac{\vartheta^*}{c}\right)^2\right] \frac{a_{1,0}}{c} + \\ & \quad + \left[0,000365 \left(\frac{a_{1,1}}{c}\right)^2 - \left(0,000679 \frac{h}{c} + 0,000625\right) \frac{a_{1,1}}{c} - 0,000994 \left(\frac{h}{c}\right)^2 - \right. \\ & \quad \left. - 0,00207 \frac{h}{c} - 0,001073 + 0,000147 \left(\frac{\vartheta^*}{c}\right)^2\right] \frac{\vartheta^*}{c} = 0. \end{aligned} \quad (41b)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{1,1}}{c}\right)^3 + \left(0,565 \frac{h}{c} + 0,826\right) \left(\frac{a_{1,1}}{c}\right)^2 + \left[58,94 \left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)^2 + 0,754 \left(\frac{h}{c}\right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 1,576 \frac{h}{c} + 0,878 + 256,6 \frac{1}{kc^2} + 8,77 \frac{\vartheta^*}{c} \frac{a_{1,0}}{c} + 0,3176 \left(\frac{\vartheta^*}{c}\right)^2\right] \frac{a_{1,1}}{c} - \\ & \quad - \left(92,46 \frac{h}{c} + 88,10\right) \left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)^2 + 1,33 \left(\frac{h}{c}\right)^3 + 4,09 \left(\frac{h}{c}\right)^2 + 4,19 \frac{h}{c} + 1,44 - \\ & \quad - \left(8,69 \frac{h}{c} + 7,99\right) \frac{\vartheta^*}{c} \frac{a_{1,0}}{c} - \left(0,197 \frac{h}{c} + 0,170\right) \left(\frac{\vartheta^*}{c}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (42b)$$

Bei konstantgehaltenen Werten von  $kc^2$  und  $h/c$  liefern die Gleichungen (41b) und (42b)  $\frac{a_{1,0}}{c}$  und  $\frac{a_{1,1}}{c}$  in Abhängigkeit von  $\frac{\vartheta^*}{c}$ , womit aus (45)  $\frac{W_m}{c}$  berechnet werden kann.

In Abb. 7 ist der Verlauf von  $\frac{W_m}{c}$  als Funktion von  $\frac{\vartheta^*}{c}$  für ein bestimmtes Wertepaar von  $kc^2$  und  $h/c$  dargestellt. Die Kurve hat S-förmige Gestalt. Es existieren für  $\left|\frac{\vartheta^*}{c}\right| < \frac{\vartheta_s^*}{c}$  (Schnappbereich) für jeden Wert von  $\frac{\vartheta^*}{c}$  drei zugehörige Werte von  $\frac{W_m}{c}$ , während für  $\left|\frac{\vartheta^*}{c}\right| > \frac{\vartheta_s^*}{c}$  die Zuordnung eindeutig ist. Von den drei im Schnappbereich auftretenden Gleichgewichtslagen  $\frac{W_m}{c}$  sind nur zwei stabil. In den Punkten 4





dem bei konstantgehaltenem Vorspannweg erwärmten Plättchen, Abb. 9 dagegen dem bei konstantgehaltener Temperatur vorgespannten Plättchen. Die instabilen Kurvenäste sind strichliert eingezeichnet.

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß Abb. 9 nicht nur für Bimetallplättchen, sondern auch für Einstoffplättchen gilt. Für  $k$  und  $\vartheta^*$  ist dann wegen  $E_1 = E_2$ ,  $t_1 = t_2$  und  $(\alpha_T)_1 = (\alpha_T)_2$  lediglich  $k = 6(1 - \nu^2) \left(\frac{R}{t}\right)^2$  bzw.  $\vartheta^* = -2,6 h$  zu setzen, was für jede Temperatur  $T$  gilt. Es folgt somit das interessante Ergebnis, daß bei Platten, die nur querbelastet sind, ein Stabilitätsproblem vorliegen kann<sup>6</sup>. So ist etwa bei der nach Abb. 1 beanspruchten Kreisplatte die Lage  $\frac{W_m}{c} = 0$  nur für hinreichend kleine Kräfte stabil. In diesem Zusammenhang wäre noch der Einfluß der Plattenberandung und der Belastung auf die Stabilitätsgrenze zu untersuchen. Es sei noch erwähnt, daß Marguerre<sup>7</sup> für den am Fußpunkt elastisch eingespannten starren Stab unter Quer- und Längslast Kurven erhalten hat, die jenen der Abb. 9 sehr ähnlich sind.

Als nächstes soll untersucht werden, wann bzw. unter welchen Bedingungen der Schnappeffekt auftritt. Zu diesem Zweck wird der Fall des schleichenden Durchganges betrachtet: Für  $\frac{\vartheta^*}{c} = 0$  gilt  $\left(\frac{W_m}{c}\right)_{1,2,3} = 0$  oder mit (45)  $\left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)_{1,2,3} = 0$ . Aus (41 b) und (42 b) folgt für  $\frac{\vartheta^*}{c} = 0$ :  $\left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)_1 = 0$  und

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{1,0}}{c}\right)_{2,3} = & -0,00500 \left(\frac{a_{1,1}}{c}\right)^2 + \left(0,0145 \frac{h}{c} + 0,0139\right) \frac{a_{1,1}}{c} + \\ & + 0,0187 \left(\frac{h}{c}\right)^2 + 0,0390 \frac{h}{c} + 0,0202 - 0,3727 \frac{1}{k c^2} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Verwendet man die aus (42 b) folgende Näherung für  $\frac{a_{1,1}}{c}$ , die für  $\frac{\vartheta^*}{c} = 0$  und  $\frac{a_{1,0}}{c} = 0$  lautet:

$$\frac{a_{1,1}}{c} \approx - \frac{1,33 \left(\frac{h}{c}\right)^3 + 4,09 \left(\frac{h}{c}\right)^2 + 4,19 \frac{h}{c} + 1,44}{0,754 \left(\frac{h}{c}\right)^2 + 1,576 \frac{h}{c} + 0,878 + 256,6 \frac{1}{k c^2}},$$

so erhält man aus (48) für  $k c^2$  die Gleichung

$$\left(\frac{k c^2}{100}\right)^3 + Q_2 \left(\frac{k c^2}{100}\right)^2 + Q_1 \frac{k c^2}{100} + Q_0 = 0, \quad (49)$$

wobei  $Q_0$ ,  $Q_1$  und  $Q_2$  Funktionen von  $h/c$  sind.

Das Ergebnis von Gleichung (49) ist in Abb. 10 in Kurvenform wiedergegeben, wobei  $k$  als Parameter verwendet wurde. Die  $k$ -Kurven, die nur für positive Werte von  $h$  und  $c$  gezeichnet wurden, sind näherungsweise Geraden. Im Falle des schleichenden Durchganges ist durch die Wahl von zwei der drei Parameter  $k$ ,  $h$  und  $c$  jeweils der dritte eindeutig bestimmt. Je größer die Vorverwölbung, desto kleiner ist für einen konstanten Wert von  $k$  der erforderliche Vorspannweg.

Die Frage nach dem Auftreten des Schnappeffektes läßt sich an Hand von Abb. 10 sogleich beantworten: Liegt für einen bestimmten Wert  $k$  der dem Wertepaar  $h, c$  entsprechende Punkt auf der betreffenden  $k$ -Kurve, so ist schleichender Durchgang vorhanden. Liegt der Punkt oberhalb der  $k$ -Kurve, so tritt der Schnappeffekt auf, liegt der Punkt unterhalb der  $k$ -Kurve, so tritt der Schnappeffekt nicht auf.

Der erforderliche Zeitaufwand zur Lösung der Gleichungen (41 b) und (42 b) hängt in hohem Maße von der Güte der geschätzten ersten Näherung ab. Man erhält sofort

<sup>6</sup> A. Nádai: Die elastischen Platten. Berlin: Springer-Verlag, 1925, S. 285.

<sup>7</sup> K. Marguerre: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1950, S. 191.

eine gute Näherung, wenn man den Kurvenverlauf durch eine Parabel dritter Ordnung von der Form  $\frac{\vartheta^*}{c} = d_1 \left[ \left( \frac{W_m}{c} \right)^3 - d_2^2 \frac{W_m}{c} \right]$  annähert, wobei man  $d_1$  und  $d_2$  aus der Forderung bestimmt, daß die Parabel den Punkt  $\left( \frac{\vartheta^*}{c} = 0, \frac{W_m}{c} \neq 0 \right)$  und die Tangente im Punkt  $\left( \frac{\vartheta^*}{c} = 0, \frac{W_m}{c} = 0 \right)$  mit der Kurve gemeinsam haben soll. Diese beiden Werte sind verhältnismäßig leicht zu bestimmen.

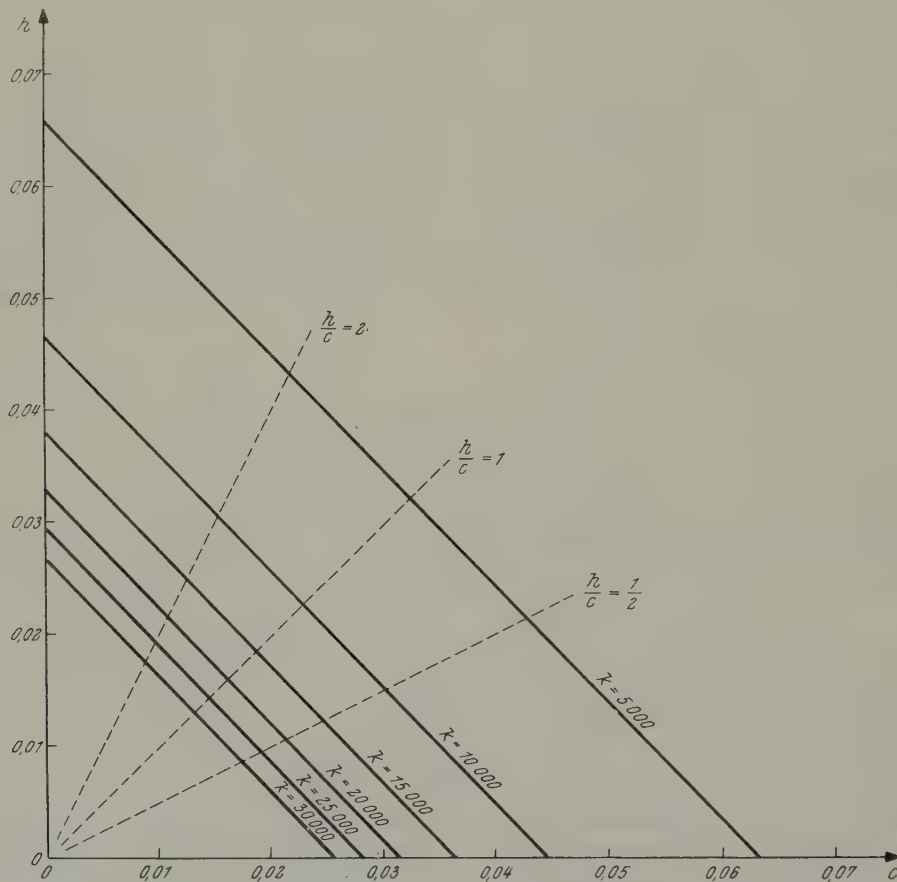


Abb. 10

Die in den Abb. 11, 12 und 13 dargestellten  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ - bzw.  $\frac{W_m}{c} - kc^2$ -Schaubilder sollen einen Überblick über den Einfluß von  $kc^2$  und  $h/c$  auf die mittlere Durchbiegung geben. Abb. 14 zeigt den Zusammenhang der (dimensionslosen, bezogenen) Schnapptemperatur  $\frac{\vartheta_s^*}{c}$  und der Vorspannkennziffer  $kc^2$  für vier verschiedene Werte von  $h/c$ . Man sieht, daß der für eine bestimmte Schnapptemperatur erforderliche Wert der Vorspannkennziffer  $kc^2$  mit abnehmender Vorverwölbung stark anwächst.

Zur Wahl der Ansätze (27c) und (28b) für  $\bar{W}$  bzw.  $\bar{F}$  kann folgendes gesagt werden: Die Erweiterung des Ansatzes für  $\bar{F}$  um das  $b_{3,0}$ -Glied hatte eine merkliche Änderung des Ergebnisses (z. B. der  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ -Kurve) zur Folge, während der Einfluß des  $b_{4,0}$ -Gliedes bereits sehr klein war. Da der Einfluß des von  $\varphi$  abhängigen Lösungsanteiles von



$\bar{F}$  verhältnismäßig gering ist, dürfte der gewählte Ansatz für  $\bar{F}$  ausreichend sein. Eine Erweiterung des Ansatzes für  $\bar{W}$  hätte eine geringe Änderung des Ergebnisses erwarten lassen. Es wurde jedoch davon Abstand genommen, da die numerische Auswertung

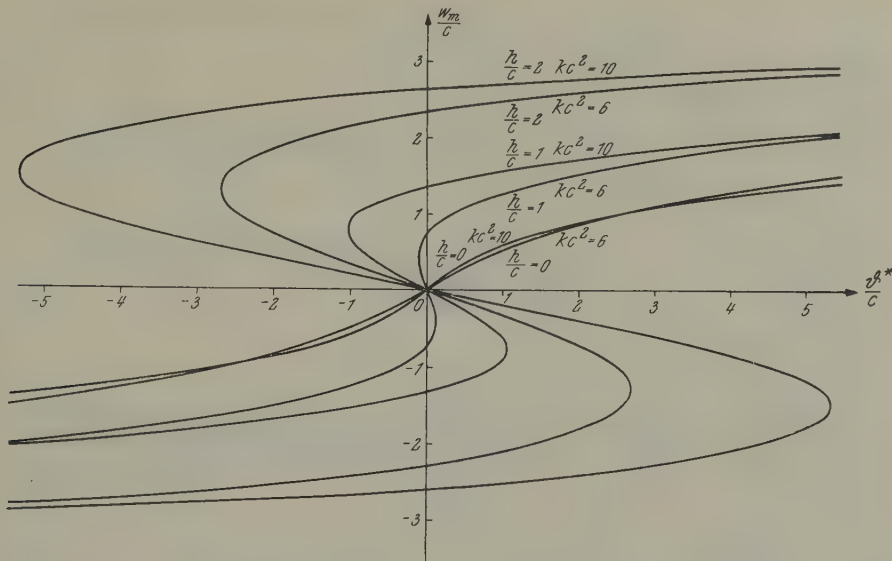


Abb. 11

unverhältnismäßig schwieriger geworden wäre. Die Hinzunahme eines weiteren Ansatzgliedes für  $\bar{W}$  hätte an Stelle der beiden Gleichungen (41 a) und (42 a) drei gekoppelte Gleichungen dritten Grades geliefert.

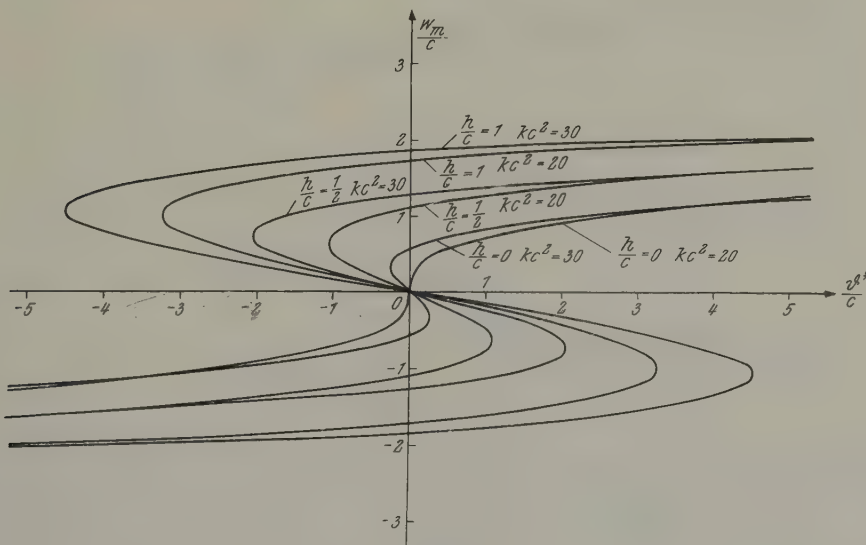


Abb. 12

Die nachfolgend gezeigten Versuchsergebnisse weisen von den Ergebnissen der theoretischen Untersuchung eine einseitige Abweichung von etwa 5% auf. Da die vorliegende Arbeit vor allem die grundsätzlichen Zusammenhänge aufzeigen will, dürfte

die erzielte Genauigkeit ausreichend sein, zumal die zulässigen Toleranzen der Materialfestwerte bereits in der Größenordnung der Abweichungen liegen.

Für den Sonderfall verschwindender Vorverwölbung ( $h=0$ ) erhält man für den

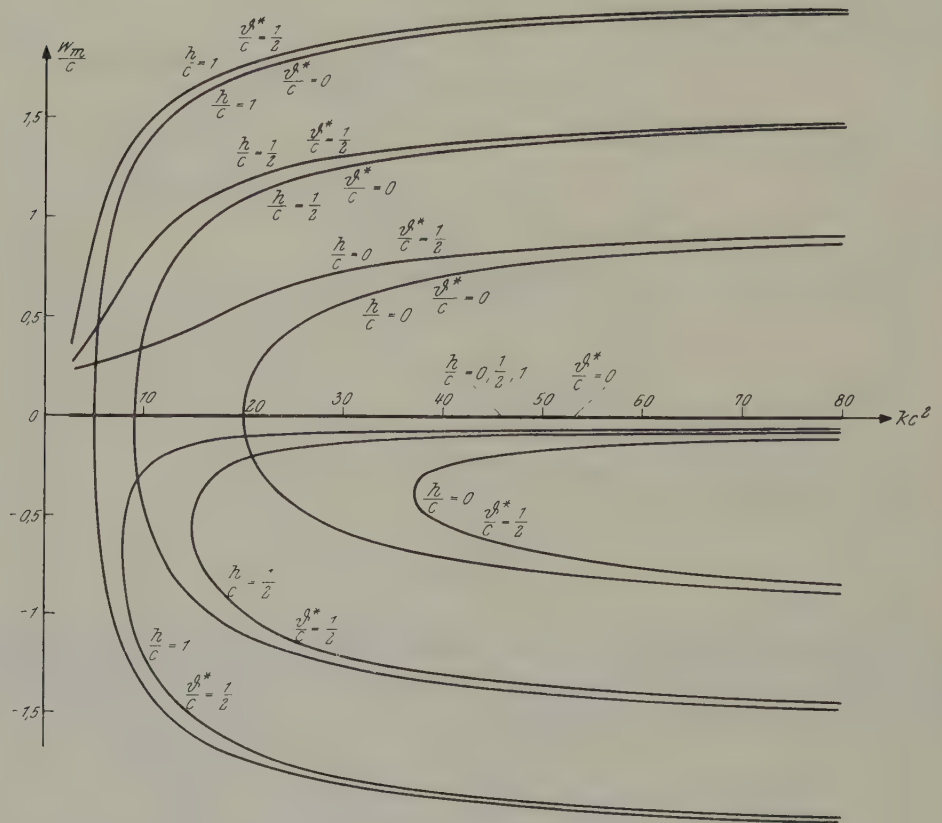


Abb. 13

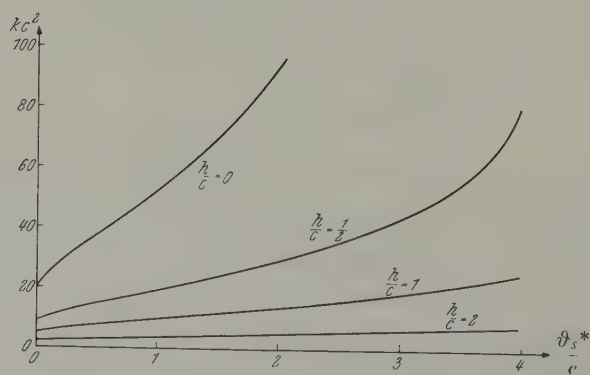


Abb. 14

schleichenden Durchgang  $(k c^2)_{\text{krit}} = 20$ , d. h. der Schnappeffekt tritt bei  $k c^2 > 20$  auf. Bei dünnen Plättchen (großer Wert von  $k$ ) ist somit der erforderliche Vorspannweg kleiner als bei dickeren Plättchen.



Abb. 15 zeigt das  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ -Schaubild mit  $kc^2$  als Parameter und Abb. 16 das  $\frac{W_m}{c} - kc^2$ -Schaubild mit  $\frac{\vartheta^*}{c}$  als Parameter.

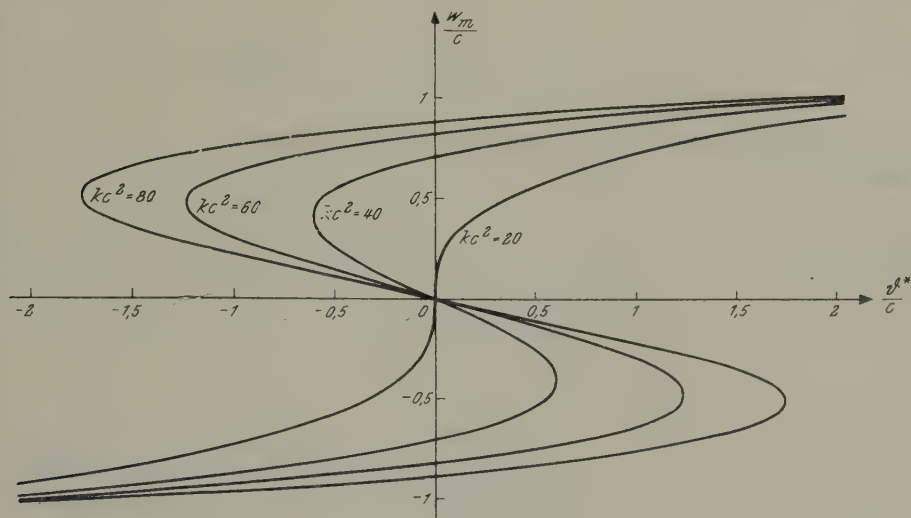


Abb. 15

Zur Überprüfung der auf theoretischem Wege gewonnenen Resultate wurden an einer Anzahl von Bimetallplättchen Messungen bei verschiedenen Temperaturen und Vorspannungen durchgeführt. Es standen hierzu drei Bimetallsorten mit der Firmen-

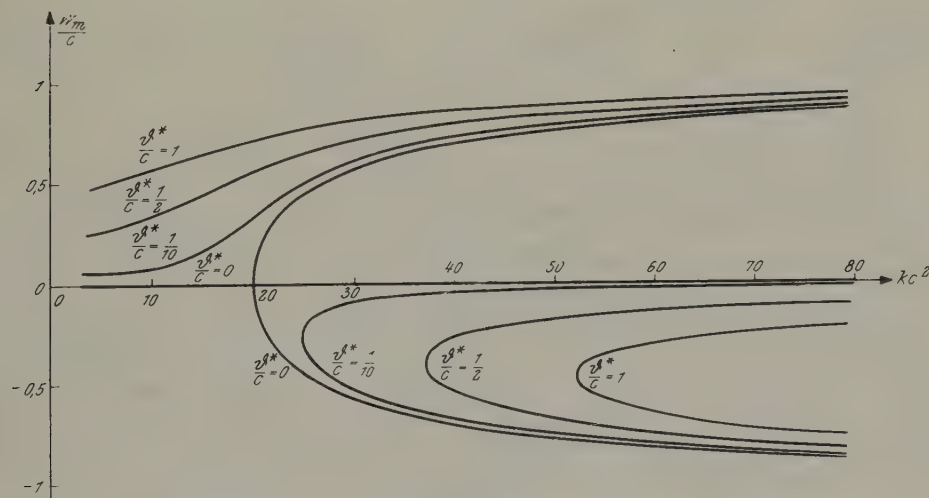


Abb. 16

bezeichnung\* Bimetall 2042, 2036 und 7436 und den folgenden Materialfestwerten zur Verfügung:

Sorte	Bezeichnung	$E_1 = E_2$ [kp/mm <sup>2</sup> ]	$(\alpha_T)_2 - (\alpha_T)_1$ [1/°C]
I	2042	16 500	$149 \cdot 10^{-7}$
II	2036	14 500	$208 \cdot 10^{-7}$
III	7436	15 000	$293 \cdot 10^{-7}$

\* Das Bimetall wurde von der Vacuummelze A. G., Hanau am Main, zur Verfügung gestellt.

Von jeder Sorte wurden Plättchen gleicher Schichtdicke ( $t_1 = t_2$ ) vom konstanten Radius  $R = 14$  mm in den drei Stärken 0,2 mm, 0,3 mm und 0,4 mm verwendet. Für die Plattenkennziffer  $k$  in Abhängigkeit von der Dicke  $t$  erhält man:

$t$ [mm]	0,2	0,3	0,4
$k$	26750	11890	6690

Die Messungen an den im spannungsfreien Zustand ebenen Plättchen wurden bei drei Vorspannweegen vorgenommen.

Die Meßergebnisse sind in den  $W_m - \frac{\vartheta}{1/100 \sqrt{k}}$ -Schaubildern, Abb. 17, 18 und 19, eingetragen. Die hier verwendete Größe  $\frac{\vartheta}{1/100 \sqrt{k}}$  ist im Gegensatz zu  $\vartheta$  unabhängig von  $\frac{R}{t}$ .

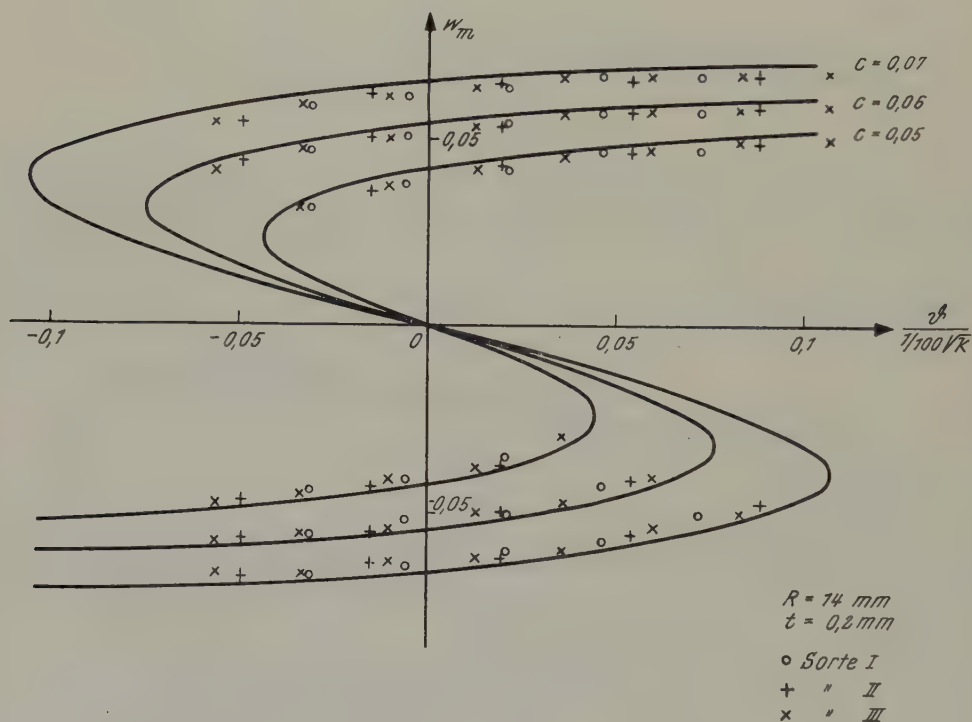


Abb. 17

Als Ursachen der Abweichung der theoretischen von den versuchsmäßig erhaltenen Ergebnissen, die im allgemeinen unter 5% liegt, kommen neben der mangelnden Genauigkeit des Lösungsansatzes noch die folgenden Umstände in Betracht: Etwaige Eigenspannungen, geringe Abweichung von der ebenen Form des Plättchens, zulässige Toleranzen der Materialfestwerte, Abweichung von der Isotropie des Materials (Herstellung durch Walzen); die Vorspannkkräfte greifen nicht genau am Rand, sondern 0,4 mm innerhalb des Randes an; in der Umgebung der Kraftangriffspunkte können örtliche plastische Verformungen auftreten; bei den 0,4-mm-Plättchen überschreiten die Spannungen stellenweise bereits die Proportionalitätsgrenze des Materials.



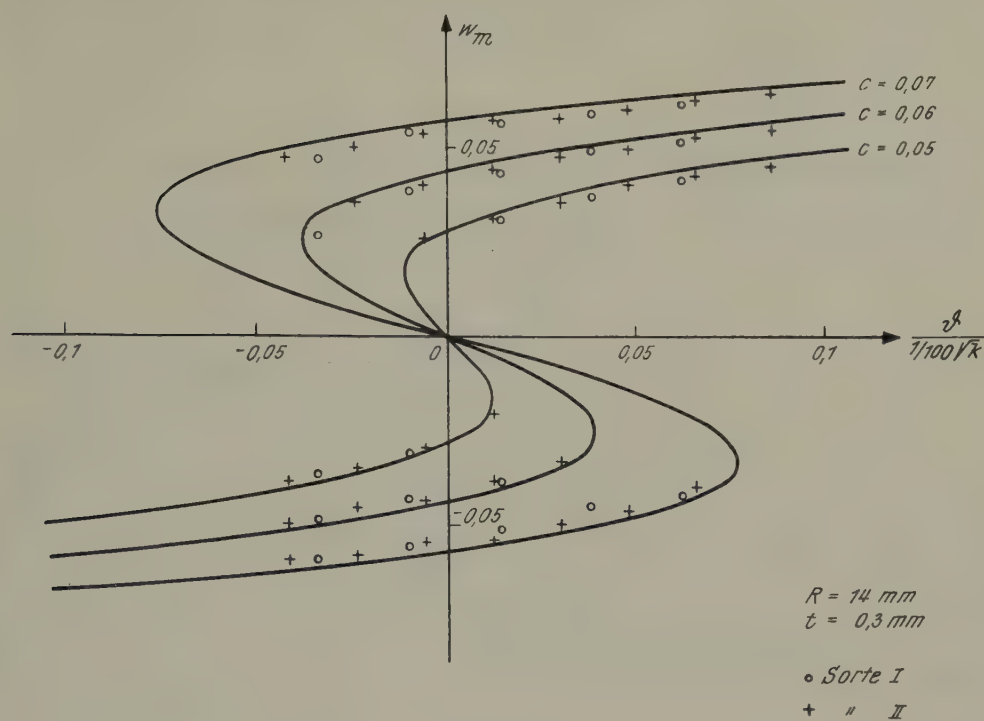


Abb. 18

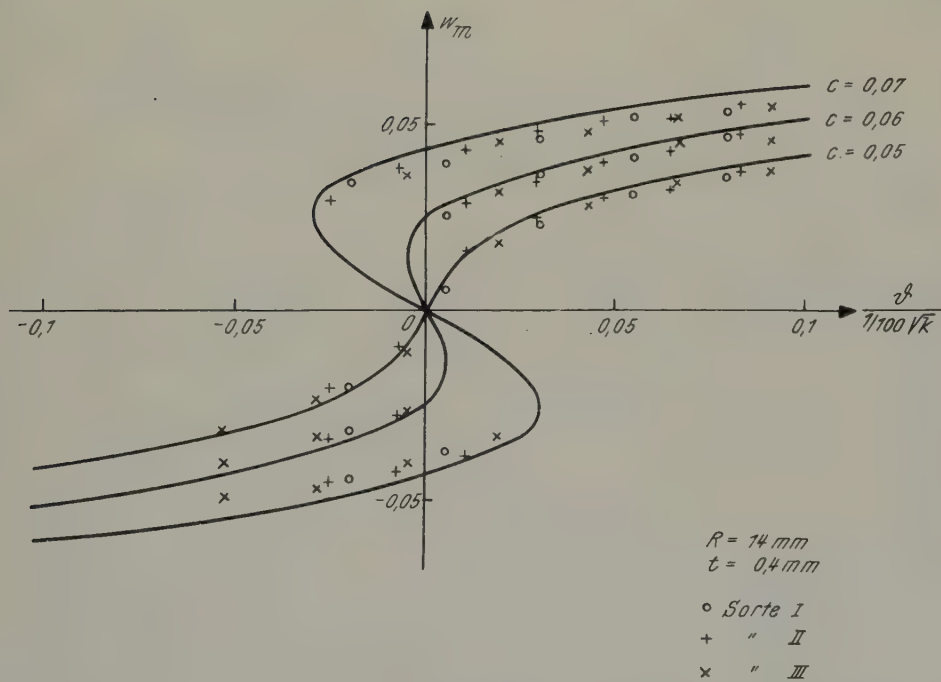


Abb. 19

Schließlich sei noch der Sonderfall verschwindender Vorspannung ( $c = 0$ ) behandelt. Unter der Voraussetzung  $h \neq 0$  lauten die durch  $h^3$  dividierten Gleichungen (41a) und (42a) für  $c = 0$ :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{1,0}}{h}\right)^3 + 0,155 \frac{\vartheta^*}{h} \left(\frac{a_{1,0}}{h}\right)^2 + \\ & + \left[ 0,00500 \left(\frac{a_{1,1}}{h}\right)^2 - 0,0145 \frac{a_{1,1}}{h} - 0,0187 + 0,3727 \frac{1}{k h^2} + 0,00819 \left(\frac{\vartheta^*}{h}\right)^2 \right] \frac{a_{1,0}}{h} + \\ & + \left[ 0,000365 \left(\frac{a_{1,1}}{h}\right)^2 - 0,000679 \frac{a_{1,1}}{h} - 0,000994 + 0,000147 \left(\frac{\vartheta^*}{h}\right)^2 \right] \frac{\vartheta^*}{h} = 0 \quad (41c) \end{aligned}$$

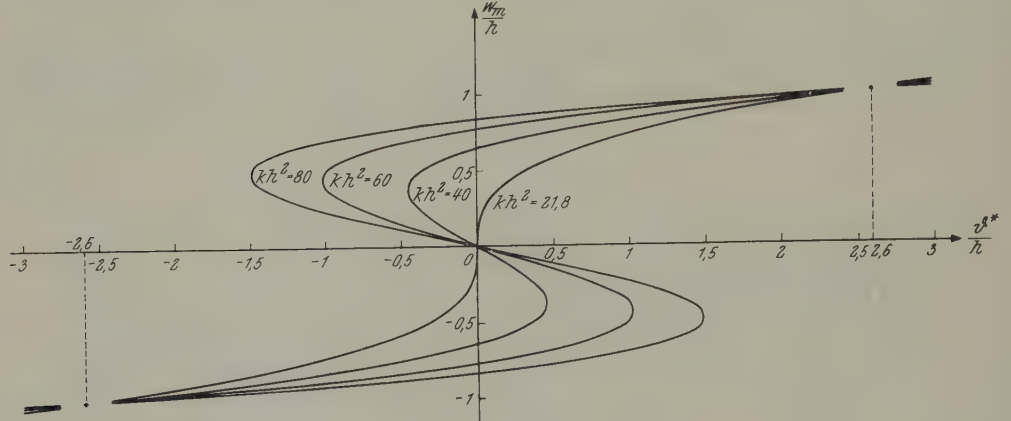


Abb. 20

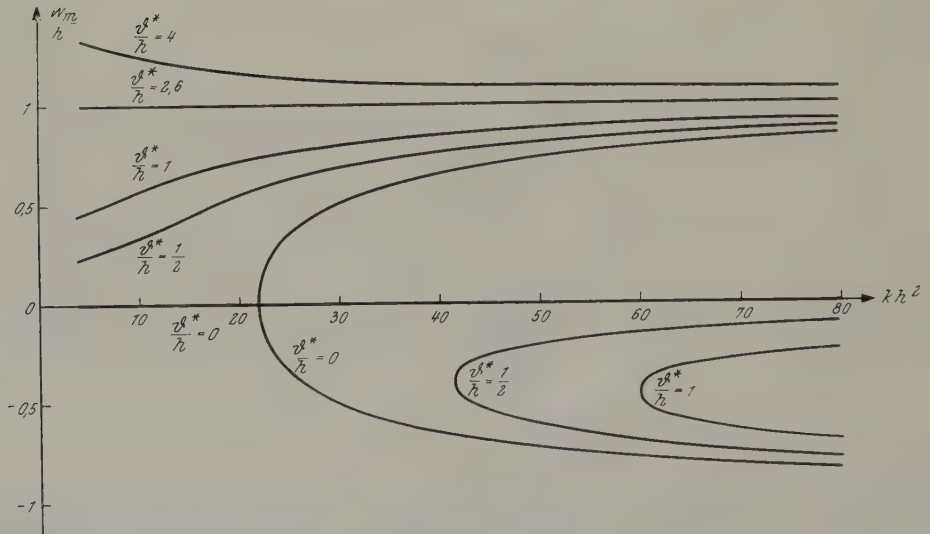


Abb. 21

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{1,1}}{h}\right)^3 + 0,565 \left(\frac{a_{1,1}}{h}\right)^2 + \\ & + \left[ 58,94 \left(\frac{a_{1,0}}{h}\right)^2 + 0,754 + 256,6 \frac{1}{k h^2} + 8,77 \frac{\vartheta^*}{h} \frac{a_{1,0}}{h} + 0,3176 \left(\frac{\vartheta^*}{h}\right)^2 \right] \frac{a_{1,1}}{h} - \\ & - 92,46 \left(\frac{a_{1,0}}{h}\right)^2 + 1,33 - 8,69 \frac{\vartheta^*}{h} \frac{a_{1,0}}{h} - 0,197 \left(\frac{\vartheta^*}{h}\right)^2 = 0, \quad (42c) \end{aligned}$$

wobei  $kh^2$  als Parameter auftritt.



Das vorgewölbte Plättchen ist in diesem Falle für  $\vartheta = 0$  nicht vorgespannt. Es werden jedoch während der Temperaturbeanspruchung Randkräfte entstehen, da die relative Lage der vier Randpunkte ( $\varphi = 0, \pi/2, \pi$  und  $3\pi/2$ ) ungeändert bleibt.

Es ist beachtenswert, daß die Gleichungen (41 c) und (42 c) nicht nur für  $\frac{\vartheta^*}{h} = -2,6$ ,  $\frac{a_{1,0}}{h} = \frac{a_{1,1}}{h} = 0$  — dieser Zustand entspricht der spannungsfreien Ausgangslage ( $\vartheta = 0$ ) —, sondern auch für  $\frac{\vartheta^*}{h} = +2,6$ ,  $\frac{a_{1,0}}{h} = \frac{a_{1,1}}{h} = 0$  erfüllt sind. In beiden Fällen herrscht Spannungsfreiheit, wie man sich leicht an Hand von (43) bzw. (43a) überzeugen kann. Es existiert also neben der Ausgangslage noch eine zweite spannungsfreie Lage, die „gestürzte“ Lage. Die Durchbiegungsfläche der gestürzten Lage ist gleichfalls zylindrisch, nur ist die Zylinderachse gegenüber jener der Ausgangslage um  $90^\circ$  verdreht.

Für den schleichenden Durchgang erhält man  $(kh^2)_{\text{krit}} = 21,8$ . Die Abb. 20 und 21 stellen das  $\frac{W_m}{h} - \frac{\vartheta^*}{h}$ -Schaubild bzw. das  $\frac{W_m}{h} - kh^2$ -Schaubild dar. Als Folge der zwei vorhandenen spannungsfreien Lagen gehen in Abb. 20 alle Kurven durch die Punkte  $\left(\frac{W_m}{h} = 1, \frac{\vartheta^*}{h} = 2,6\right)$  und  $\left(\frac{W_m}{h} = -1, \frac{\vartheta^*}{h} = -2,6\right)$  und entarten in Abb. 21 die Kurven für  $\frac{\vartheta^*}{h} = 2,6$  und  $\frac{\vartheta^*}{h} = -2,6$  (nicht eingezeichnet) zu Geraden.

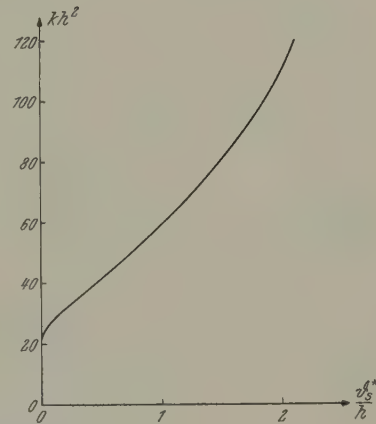


Abb. 22

In Abb. 22 ist die (dimensionslose, bezogene) Schnapptemperatur  $\frac{\vartheta_s^*}{h}$  als Funktion von  $kh^2$  aufgetragen.

## V. Spannungen. Verzerrungsenergie

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}
 n^{11} &= N_r & m^{11} &= M_r \\
 n^{12} &= n^{21} = \frac{1}{r} N_{r\varphi} = \frac{1}{r} N_{\varphi r} & m^{12} &= m^{21} = \frac{1}{r} M_{r\varphi} = \frac{1}{r} M_{\varphi r} \\
 n^{22} &= \frac{1}{r^2} N_{\varphi\varphi} & m^{22} &= \frac{1}{r^2} M_{\varphi\varphi} \\
 \bar{\gamma}_{11} &= \gamma_r & \omega_{11} &= \kappa_r \\
 \bar{\gamma}_{12} &= \bar{\gamma}_{21} = r \gamma_{r\varphi} = r \bar{\gamma}_{\varphi r} & \omega_{12} &= \omega_{21} = r \kappa_{r\varphi} = r \kappa_{\varphi r} \\
 \bar{\gamma}_{22} &= r^2 \bar{\gamma}_{\varphi\varphi} & \omega_{22} &= r^2 \kappa_{\varphi\varphi} \\
 v_1 &= u & v_2 &= r v
 \end{aligned} \tag{50}$$

folgt aus (6), (7) und (12) für die resultierenden Schnittgrößen in Polarkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} N_r &= B (\bar{\gamma}_r + \nu \bar{\gamma}_\varphi) + C (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi) - P T \\ N_\varphi &= B (\bar{\gamma}_\varphi + \nu \bar{\gamma}_r) + C (\kappa_\varphi + \nu \kappa_r) - P T \\ N_{r\varphi} &= B (1 - \nu) \bar{\gamma}_{r\varphi} + C (1 - \nu) \kappa_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi) + C (\bar{\gamma}_r + \nu \bar{\gamma}_\varphi) - Q T \\ M_\varphi &= D (\kappa_\varphi + \nu \kappa_r) + C (\bar{\gamma}_\varphi + \nu \bar{\gamma}_r) - Q T \\ M_{r\varphi} &= D (1 - \nu) \kappa_{r\varphi} + C (1 - \nu) \bar{\gamma}_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \left( D - \frac{C^2}{B} \right) \frac{\partial}{\partial r} (\kappa_r + \kappa_\varphi) \\ Q_\varphi &= \left( D - \frac{C^2}{B} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\kappa_r + \kappa_\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Hierbei lauten die Deformationsgrößen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \\ \bar{\gamma}_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right)^2 \\ \bar{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_r &= - \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial r^2} \\ \kappa_\varphi &= - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (w - w_0)}{\partial r} \right) \\ \kappa_{r\varphi} &= - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (w - w_0)}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Als nächstes werden für die Schnittgrößen die folgenden dimensionslosen Ausdrücke eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} n_r &= \frac{N_r}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B k^{-1}} \\ n_\varphi &= \frac{N_\varphi}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B k^{-1}} \\ n_{r\varphi} &= \frac{N_{r\varphi}}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B k^{-1}} \end{aligned} \right\} \quad (56) \quad \left. \begin{aligned} m_r &= \frac{M_r}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B R k^{-3/2}} \\ m_\varphi &= \frac{M_\varphi}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B R k^{-3/2}} \\ m_{r\varphi} &= \frac{M_{r\varphi}}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B R k^{-3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \frac{Q_r}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B k^{-3/2}} \\ q_\varphi &= \frac{Q_\varphi}{\frac{1}{2} (1 - \nu^2) B k^{-3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Unter Verwendung der Airyschen Spannungsfunktion kann für  $n_r$ ,  $n_\varphi$  und  $n_{r\varphi}$  geschrieben werden:



$$\left. \begin{aligned} n_r &= \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ n_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \\ n_{r\varphi} &= -\left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Mit (14) erhält man für  $m_r$ ,  $m_\varphi$  und  $m_{r\varphi}$ :

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \frac{C}{B R} \sqrt{k} n_r - \sqrt{k c^2} \left[ \frac{\partial^2 \frac{W-W_0}{c}}{\partial \eta^2} + \nu \left( \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \frac{W-W_0}{c}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \frac{W-W_0}{c}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{c} \right] \\ m_\varphi &= \frac{C}{B R} \sqrt{k} n_\varphi - \sqrt{k c^2} \left[ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \frac{W-W_0}{c}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \frac{W-W_0}{c}}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial^2 \frac{W-W_0}{c}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{c} \right] \\ m_{r\varphi} &= \frac{C}{B R} \sqrt{k} n_{r\varphi} - \sqrt{k c^2} (1-\nu) \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \frac{W-W_0}{c}}{\partial \eta \partial \varphi} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \frac{W-W_0}{c}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Schreibt man noch für  $q_r$  und  $q_\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} q_r &= -\sqrt{k c^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta \frac{W-W_0}{c} \\ q_\varphi &= -\sqrt{k c^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta \frac{W-W_0}{c} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

so sind sämtliche dimensionslosen Schnittgrößen durch  $W$  und  $F$  ausgedrückt.

Zur Berechnung der Schnittgrößen werden zuerst aus (41b) und (42b) die Koeffizienten  $\frac{a_{1,0}}{c}$  und  $\frac{a_{1,1}}{c}$  für die gewählten Werte von  $kc^2$ ,  $h/c$  und  $\vartheta^*/c$  bestimmt. Die Koeffizienten  $b_{1,0}$ ,  $b_{2,0}$ ,  $b_{3,0}$ ,  $b_{4,0}$ ,  $b_{1,1}$  und  $b_{2,2}$  sind dann aus den Gleichungen (43), die man besser wie folgt anschreibt, zu ermitteln:

$$\left. \begin{aligned} b_{1,0} &= kc^2 \left[ 0,0369 \left( \frac{\vartheta^*}{c} + 2,6 \frac{h}{c} \right) \left( \frac{\vartheta^*}{c} - 2,6 \frac{h}{c} \right) - 0,531 \frac{h}{c} - 0,284 + 1,55 \frac{\vartheta^*}{c} \frac{a_{1,0}}{c} + \right. \\ &\quad \left. + 16,92 \left( \frac{a_{1,0}}{c} \right)^2 - 0,353 \frac{h}{c} \frac{a_{1,1}}{c} - 0,377 \frac{a_{1,1}}{c} - 0,129 \left( \frac{a_{1,1}}{c} \right)^2 \right] \\ b_{2,0} &= kc^2 \left[ \phantom{0,0369} + 0,013 \frac{h}{c} + 0,0170 - 0,237 \frac{\vartheta^*}{c} \frac{a_{1,0}}{c} - \right. \\ &\quad \left. - 5,412 \left( \frac{a_{1,0}}{c} \right)^2 + 0,263 \frac{h}{c} \frac{a_{1,1}}{c} + 0,309 \frac{a_{1,1}}{c} + 0,3013 \left( \frac{a_{1,1}}{c} \right)^2 \right] \\ b_{3,0} &= \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

Nach der Berechnung von  $\bar{W}$  und  $\bar{F}$  mittels der Gleichungen (27c) und (28b) erhält man dann die Schnittgrößen selbst.

Im Sonderfall  $h=0$ ,  $kc^2=50$ ,  $C=0$  wurden für den Symmetrieschnitt  $\varphi=0$  die dimensionslosen Schnittgrößen für sieben Punkte der  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ -Kurve numerisch ermittelt. Das Ergebnis ist in Abb. 23 in Kurvenform wiedergegeben.

Die Schnittgrößen  $n_r$  und  $n_\varphi$  sind im Innenbereich des Plättchens ( $\eta < 0,6$  bis  $0,7$ ) negativ (Druck).  $n_r$  bleibt im gesamten Bereich negativ und fällt gegen den Rand

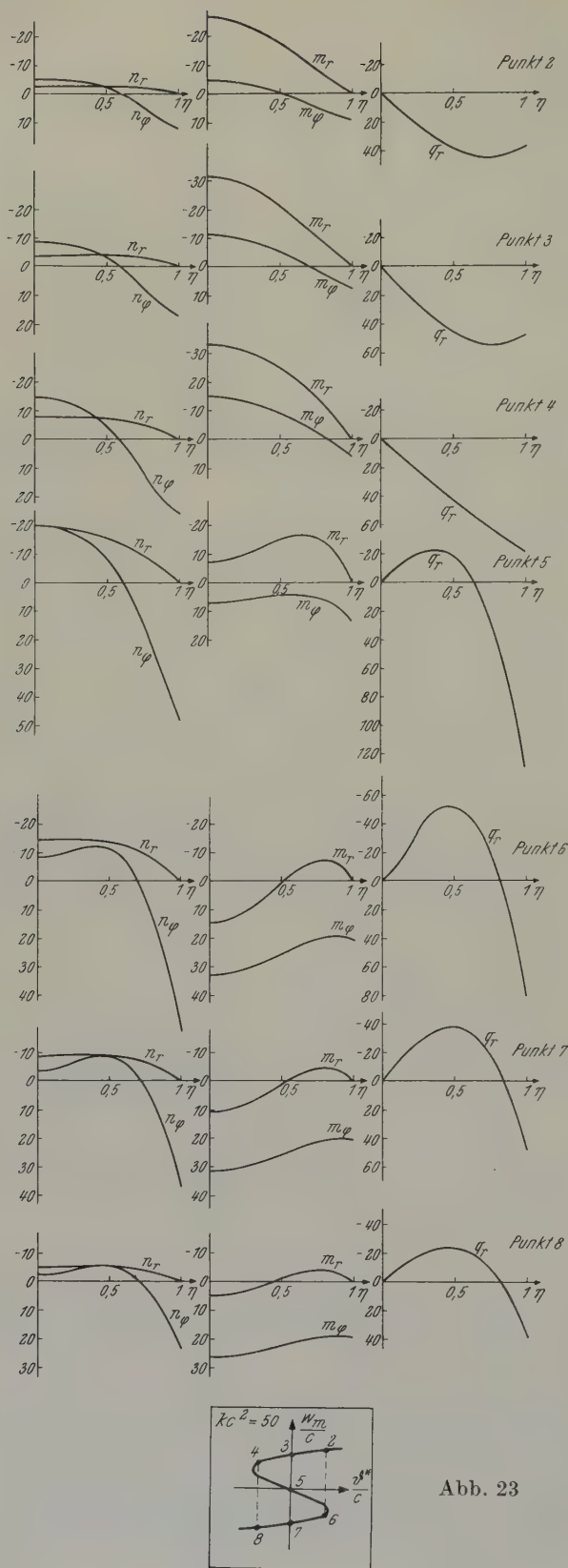


Abb. 23

zu auf Null ab, während  $n_\phi$  im Außenbereich ( $\eta > 0,6$  bis  $0,7$ ) positiv (Zug) wird und gegen den Rand zu anwächst. Die negativen Werte von  $n_r$  und  $n_\phi$  im Innenbereich wachsen von Punkt 2 bis Punkt 5 an. Sie erreichen im Punkt 5 (instabiles Gleichgewicht) ihren Höchstwert. Die Biegemomente  $m_r$  und  $m_\phi$  weisen im allgemeinen — Punkt 5 ausgenommen — in  $\eta = 0$  ihre absoluten Größtwerte auf und fallen gegen den Rand zu ab. Die Randkräfte, charakterisiert durch  $q_r$  in  $\eta = 1$ , wachsen von Punkt 2 bis Punkt 5 an und erreichen im Punkt 5 ihren Größtwert.

Die Normalspannungen  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  und die Schubspannungen  $\tau_{r\phi}$  verlaufen gemäß den theoretischen Annahmen linear über die Plattenhöhe. Sie weisen im allgemeinen in der Mittelfläche einen Sprung auf, der bei den Normalspannungen von der Verschiedenheit der Temperaturendeckungskoeffizienten  $(\alpha_T)_1$  und  $(\alpha_T)_2$  sowie der Elastizitätsmoduli  $E_1$  und  $E_2$  und bei den Schubspannungen von der Verschiedenheit der Schubmoduli  $G_1$  und  $G_2$  herrührt. In Abb. 24 ist der grundsätzliche Verlauf der Spannungen angegeben.

Der Verlauf von  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  und  $\tau_{r\phi}$  kann nach Abb. 25 aus zwei Anteilen zusammengesetzt werden. Es ist zu beachten, daß jeder Anteil für sich — von Sonderfällen abgesehen — eine resultierende Schnittkraft und ein resultierendes Schnittmoment liefert.

Die Randspannungswerte, die mit den Indizes 1 oder 2 und  $a$  oder  $i$  versehen werden, je nachdem die betrachtete Randstelle der Schicht 1 oder 2 angehört und am Außen- oder Innenrand liegt, lassen sich wie folgt ausdrücken:



$$\begin{aligned}
 {}_{1a}\sigma_r &= \frac{2}{1-\nu} G_1 (\bar{\gamma}_r + \nu \bar{\gamma}_\varphi) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} G_1 (\alpha_T)_1 T + \frac{2}{1-\nu} G_1 t_1 (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi) \\
 {}_{1i}\sigma_r &= \frac{2}{1-\nu} G_1 (\bar{\gamma}_r + \nu \bar{\gamma}_\varphi) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} G_1 (\alpha_T)_1 T \\
 {}_{1a}\sigma_\varphi &= \frac{2}{1-\nu} G_1 (\bar{\gamma}_\varphi + \nu \bar{\gamma}_r) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} G_1 (\alpha_T)_1 T + \frac{2}{1-\nu} G_1 t_1 (\kappa_\varphi + \nu \kappa_r) \\
 {}_{1i}\sigma_\varphi &= \frac{2}{1-\nu} G_1 (\bar{\gamma}_\varphi + \nu \bar{\gamma}_r) - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} G_1 (\alpha_T)_1 T \\
 {}_{1a}\tau_{r\varphi} &= 2 G_1 \bar{\gamma}_{r\varphi} + 2 G_1 t_1 \kappa_{r\varphi} \\
 {}_{1i}\tau_{r\varphi} &= 2 G_1 \bar{\gamma}_{r\varphi} \\
 {}_{1a}\tau_{zr} &= 0 & {}_{1a}\tau_{z\varphi} &= 0 \\
 {}_{1i}\tau_{zr} &= \frac{B-C}{B-C} \frac{2}{2t_2} \frac{3}{2} \frac{Q_r}{t} & {}_{1i}\tau_{z\varphi} &= \frac{B-C}{B-C} \frac{2}{2t_2} \frac{3}{2} \frac{Q_\varphi}{t}
 \end{aligned} \tag{62}$$

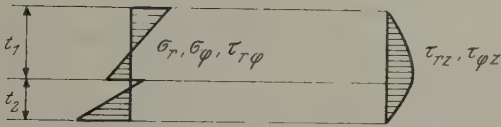


Abb. 24

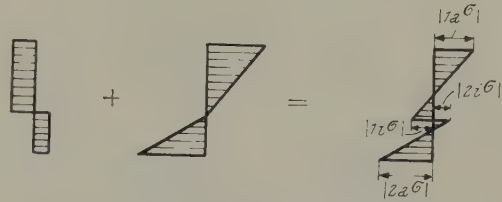


Abb. 25

Die Randspannungen der Schicht 2 erhält man in analoger Weise.

Die Größen  $\kappa_r$ ,  $\kappa_\varphi$  und  $\kappa_{r\varphi}$  werden direkt aus (55) berechnet, während  $\bar{\gamma}_r$ ,  $\bar{\gamma}_\varphi$  und  $\bar{\gamma}_{r\varphi}$  aus (51) zu ermitteln sind, nachdem  $N_r$ ,  $N_\varphi$  und  $N_{r\varphi}$  aus (59) und (56) bestimmt wurden.

Nachfolgend soll für denselben Fall  $h=0$ ,  $kc^2=50$ ,  $C=0$ , für den bereits die dimensionslosen Schnittgrößen berechnet wurden, die Spannungsverteilung über die Plattendicke an der Stelle  $\eta=0$  des geführten Schnittes  $\varphi=0$  bei speziellen Annahmen ermittelt werden. Wegen des Verschwindens von  $N_{r\varphi}$ ,  $M_{r\varphi}$ ,  $Q_r$  und  $Q_\varphi$  im betrachteten Punkt ( $\eta=0$ ,  $\varphi=0$ ) sind nur die Normalspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  zu betrachten.

Die speziellen Annahmen lauten:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 = E = 14500 \text{ [kp/mm}^2\text{]} & R &= 13 \text{ [mm]} \\
 \nu &= 0,3 & 2 t_1 &= 2 t_2 = t = 0,3 \text{ [mm]} \\
 (\alpha_T)_1 &= 10 \cdot 10^{-7} \text{ [1/}^\circ\text{C]} & c &= \bar{c}/R = 0,07 \\
 (\alpha_T)_2 &= 220 \cdot 10^{-7} \text{ [1/}^\circ\text{C]} & \sigma_P &= 70 \text{ [kp/mm}^2\text{]}.
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist in Abb. 26 dargestellt. Der Spannungsverlauf weist bei  $\vartheta \neq 0$  in der Mittelfläche einen Sprung auf. Die Maximalwerte der Spannungen treten meist an den Außenrändern der Schichten auf und erreichen im hier betrachteten Fall einen Wert, der nur knapp unter der Proportionalitätsgrenze des Materials ( $\sigma_P = 70 \text{ kp/mm}^2$ ) liegt.

Die im elastischen Körper aufgespeicherte Verzerrungsenergie ist auch bei Temperaturbeanspruchung eine Zustandsgröße, d. h. sie ist unabhängig von der Reihenfolge der aufgetragenen Beanspruchungen. Die Verzerrungsenergie  $U$  ist gegeben durch

$$U = \int_V \left[ \int \tau_{\beta}^{\alpha} d(\gamma_{\tau})_{\alpha}^{\beta} \right] dV = \frac{1}{2} \int_V \tau_{\beta}^{\alpha} (\gamma_{\tau})_{\alpha}^{\beta} dV, \quad (63)$$

wobei  $(\gamma_{\tau})_{\alpha}^{\beta}$  die nur von den Spannungen herrührenden Verzerrungen bedeuten. Mit

$$(\gamma_{\tau})_{\alpha}^{\beta} = \gamma_{\alpha}^{\beta} - \alpha_T T \delta_{\alpha}^{\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha}^{\beta} + \zeta \omega_{\alpha}^{\beta} - \alpha_T T \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (64)$$

und mit  $dV = df d\zeta$  folgt

$$U = \frac{1}{2} \int_f \int_{\zeta} \left[ \tau_{\beta}^{\alpha} (\bar{\gamma}_{\alpha}^{\beta} + \zeta \omega_{\alpha}^{\beta}) - 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} (\bar{\gamma}_{\mu}^{\mu} + \zeta \omega_{\mu}^{\mu}) - 2\alpha_T T) \alpha_T T \right] df d\zeta. \quad (63a)$$

Hierbei sind  $G$  und  $\alpha_T$  mit den Indizes 1 oder 2 versehen zu denken, je nachdem der betrachtete Punkt der Schicht 1 oder 2 angehört.

Nach Ausführung der Integration über  $\zeta$  erhält man unter Beachtung von (5) und (8)

$$U = \frac{1}{2} \int_f (n_{\alpha}^{\beta} \bar{\gamma}_{\alpha}^{\beta} + m_{\beta}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{\beta} - P \bar{\gamma}_{\mu}^{\mu} T - Q \omega_{\mu}^{\mu} T + 2\bar{P} T^2) df \quad (63b)$$

mit

$$\bar{P} = 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} [G_1 (\alpha_T)_1^2 t_1 + G_2 (\alpha_T)_2^2 t_2]. \quad (65)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6a) und (14) kann man schreiben:

$$U = \int_f \left[ \frac{1}{2} \left( D - \frac{C^2}{B} \right) H^{\alpha\beta\kappa\lambda} \omega_{\alpha\beta} \omega_{\kappa\lambda} + \left( \frac{CP}{B} - Q \right) \omega_{\mu}^{\mu} T + \frac{1}{2(1-\nu^2)B} \bar{H}_{\alpha\beta\kappa\lambda} n^{\alpha\beta} n^{\kappa\lambda} + \left( \bar{P} - \frac{P^2}{(1+\nu)B} \right) T^2 \right] df. \quad (63c)$$

Führt man die Airysche Spannungsfunktion ein und ersetzt die dimensionsbehafteten durch dimensionslose Größen, so erhält man

$$U = \frac{1}{2} \left( D - \frac{C^2}{B} \right) \int_f \left\{ (W - W_0)_{\beta}^{\alpha} (W - W_0)_{\alpha}^{\beta} + \nu [(W - W_0)_{\alpha}^{\alpha} (W - W_0)_{\beta}^{\beta} - (W - W_0)_{\beta}^{\alpha} (W - W_0)_{\alpha}^{\beta}] - 2(W - W_0)_{\alpha}^{\alpha} \vartheta + 2\bar{k} \vartheta^2 + \frac{1}{2k} [F|_{\beta}^{\alpha} F|_{\alpha}^{\beta} - \nu (F|_{\alpha}^{\alpha} F|_{\beta}^{\beta} - F|_{\beta}^{\alpha} F|_{\alpha}^{\beta})] \right\} \frac{df}{R^2} \quad (63d)$$

mit dem dimensionslosen Faktor

$$\bar{k} = \frac{\left( \bar{P}B - \frac{1}{1+\nu} P^2 \right) (BD - C^2)}{(CP - BQ)^2} = \frac{4}{3(1+\nu)} \frac{1 + \chi^2 \psi^4 + 2\chi\psi(2 + 3\psi + 2\psi^2)}{4\chi\psi(1+\psi)^2}. \quad (66)$$

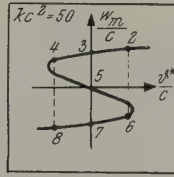
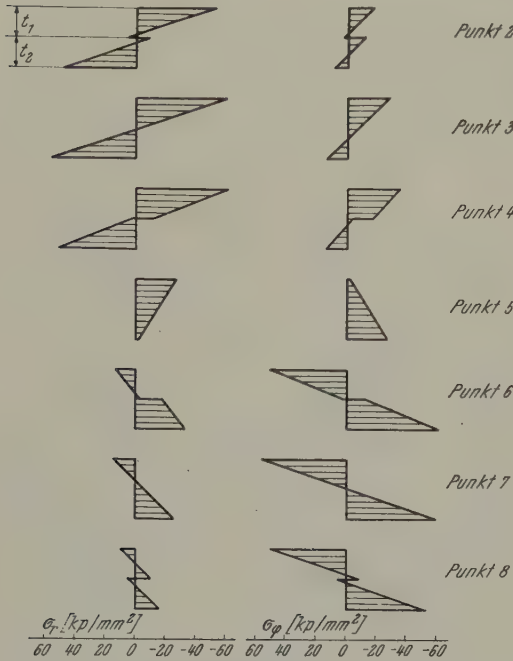


Abb. 26



Verwendet man nach Einführung der Polarkoordinaten  $(\eta, \varphi)$  die Näherungsansätze (27c) und (28b) für  $W$  und  $F$ , so folgt nach Ausführung der Integration über  $\eta$  und  $\varphi$ :

$$U = (G_1 + G_2) \frac{t^5}{R^2} \bar{k} \left\{ kc^2 \left[ 168,4 \left( \frac{a_{1,0}}{c} \right)^2 + 9,238 \left( \frac{a_{1,1}}{c} \right)^2 + (\bar{k} - 0,7692) \left( \frac{\vartheta^*}{c} + 2,6 \frac{h}{c} \right)^2 + 2,615 \right] + 1,333 b_{1,0}^2 + 2,133 b_{2,0}^2 + 3,086 b_{3,0}^2 + 4,064 b_{4,0}^2 + 2,667 b_{1,0} b_{2,0} + 2,400 b_{1,0} b_{3,0} + 2,133 b_{1,0} b_{4,0} + 4,800 b_{2,0} b_{3,0} + 4,876 b_{2,0} b_{4,0} + 6,857 b_{3,0} b_{4,0} + 1,600 b_{1,1}^2 + 1,143 b_{2,2}^2 \right\} \quad (63e)$$

mit dem dimensionslosen Faktor

$$\bar{k} = \frac{\pi}{72(1-\nu^2)(1+\nu)} \frac{2[1 + \chi^2 \psi^4 + 2\chi\psi(2 + 3\psi + 2\psi^2)]^2}{(1+\chi)(1+\chi\psi)^3(1+\psi)^5} \quad (67)$$

Durch

$$U^* = \frac{U}{(G_1 + G_2) \frac{t^5}{R^2} \bar{k}} \quad (68)$$

wird ein dimensionsloser Ausdruck für die Verzerrungsenergie definiert. Die Verzerrungsenergie setzt sich aus einem von den Biegespannungen herrührenden Anteil  $U_1^*$  und einem von den Membranspannungen herrührenden Anteil  $U_2^*$  zusammen:

$$U^* = U_1^* + U_2^* \quad (69)$$

Der mit  $kc^2$  multiplizierte Term in (63e) ist der Biegeanteil  $U_1^*$ .

Für den Fall  $h = 0$ ,  $\chi = 1$  und  $\psi = 1$  wurde der Verlauf von  $U_1^*$ ,  $U_2^*$  und  $U^*$  in

Abhängigkeit von  $\frac{\vartheta^*}{c}$  für  $kc^2 = 20, 30$  und  $50$  ermittelt und in Abb. 28 gemeinsam mit den zugehörigen  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ -Schaubildern dargestellt. In Abb. 27 wurde der besseren

Übersicht halber der Verlauf von  $U^*$  in Abhängigkeit von  $\frac{\vartheta^*}{c}$  mit der entsprechenden  $\frac{W_m}{c} - \frac{\vartheta^*}{c}$ -Kurve schematisch dargestellt, wobei zusammengehörige Punkte durch gleiche Bezifferung gekennzeichnet wurden.

Die gesamte Verzerrungsenergie  $U^*$  erreicht in den Schnappunkten 4 und 6 ihren Größtwert. Die Differenz der Verzerrungsenergie der Punkte 6 und 2 wird beim Schnappen frei und erreicht bei  $kc^2 = 50$  einen beachtlichen Wert. Ein Teil dieser freiwerdenden Energie wird in der praktischen Ausführung zur Arbeitsleistung (Betätigung eines Schalters) verwendet.

Der von den Membranspannungen herrührende Anteil  $U_2^*$  steigt von Punkt 1 bis Punkt 5 an. Im Punkt 5 (instabiles Gleichgewicht) erreicht er seinen Größtwert, der mit steigenden Werten von  $kc^2$  stark anwächst. Während der Anteil  $U_2^*$  an der gesamten Verzerrungsenergie  $U^*$  im Bereich der Punkte 1 bis 3 gering ist, spielt er doch im weiteren Verlauf, vor allem aber im instabilen Bereich, eine wichtige Rolle.

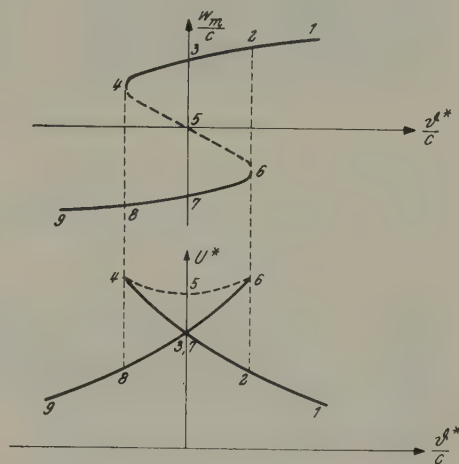


Abb. 27

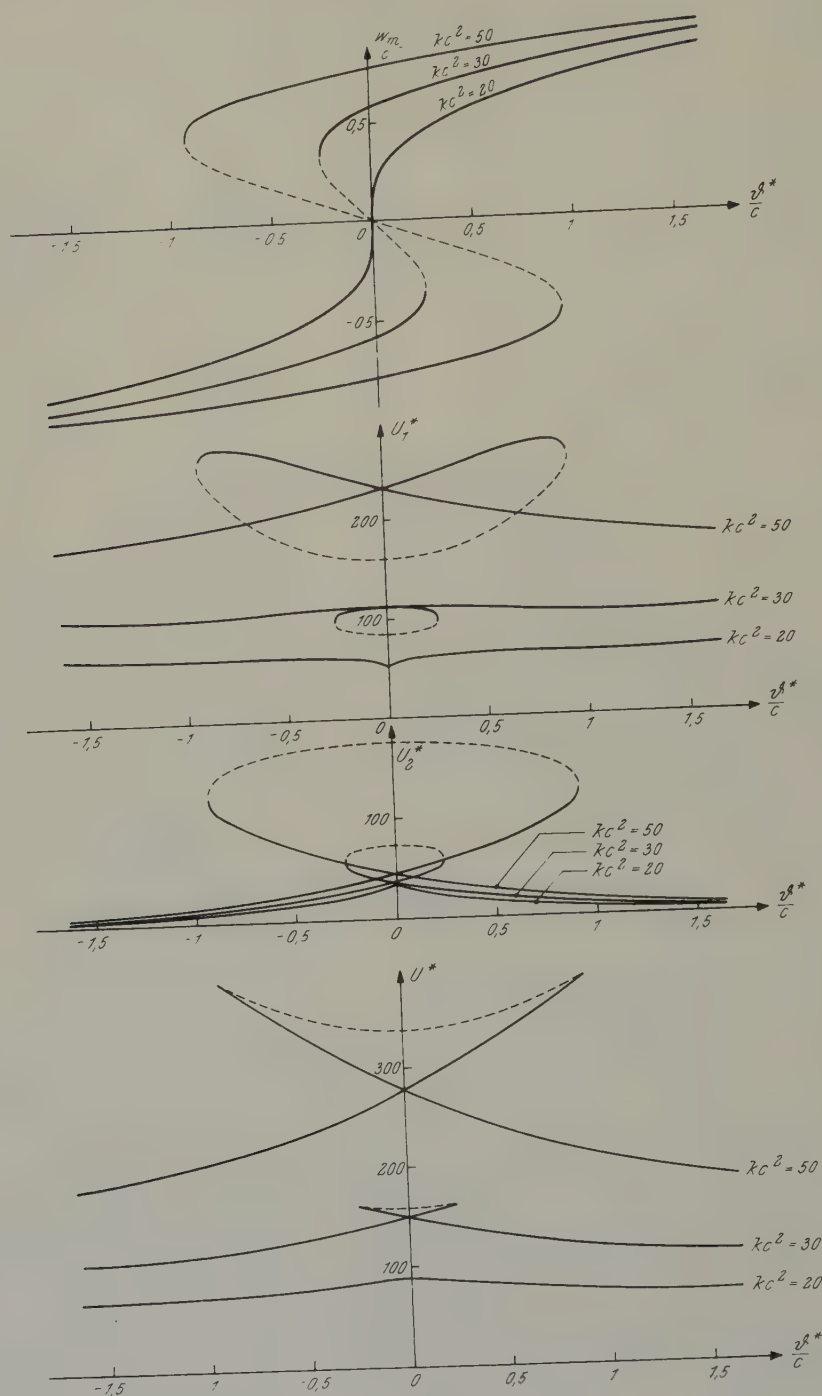


Abb. 28

Der von den Biegespannungen herrührende Anteil  $U_1^*$  ist — abgesehen vom instabilen Bereich — deutlich größer als  $U_2^*$  und weniger stark mit  $\frac{\vartheta^*}{c}$  veränderlich. Jeder Anteil für sich ist eine symmetrische Funktion von  $\frac{\vartheta^*}{c}$ .

## Anhang: Versuchseinrichtung

Die Versuchseinrichtung besteht aus einer Spannvorrichtung und einer Meßvorrichtung, die beide auf einer gemeinsamen Grundplatte montiert sind. Die Meßvorrichtung besteht aus zwei Meßuhren und Meßuhrhaltern, die jeweils um eine senkrecht zur Grundplatte stehende Säule geschwenkt werden können. Die Vorspannung der Plättchen erfolgt durch kegelförmige Stifte, die an der Spitze abgerundet sind. Zwei der diametral angeordneten Stifte sind fest mit der Grundplatte verschraubt, die beiden anderen sind als Schrauben ausgebildet, die senkrecht zur Grundplatte in Spannböcken bewegt werden können.

Abb. 29 zeigt die Einstellung des Vorspannweges mittels der hierzu vorgesehenen Meßuhr. Die Messung der Durchbiegung des Plättchenmittelpunktes erfolgt mit Hilfe der zweiten Meßuhr. Die Messungen wurden teils in Luft, teils in Öl durchgeführt.

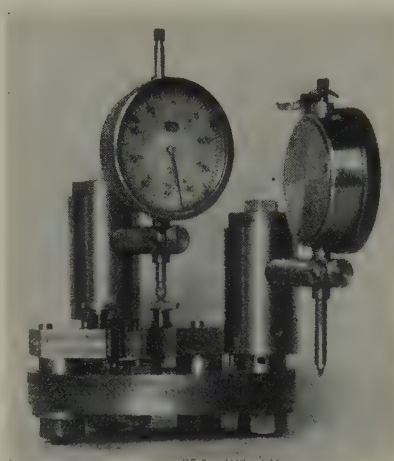


Abb. 29

Weitere Literaturangaben:

A. E. Green and W. Zerna: Theoretical Elasticity. Oxford: At the Clarendon Press, 1954.

E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien: Springer-Verlag. 1953.

S. Timoshenko: Theorie of Plates and Shells. New York, London: McGraw-Hill Book Comp., 1951.

S. Timoshenko: Collected Papers. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Comp., 1953.

R. L. Bisplinghoff: The Finite Twisting and Bending of Heated Elastic Lifting Surfaces. Mitteilungen aus dem Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau, E. T. H. Zürich, Nr. 4 (Diss.).

H. Parkus: Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten. Österr. Ing-Archiv 4 (1950).

(Eingegangen am 17. Mai 1960)

## Buckling of a Cylindrical Shell Subjected to External Pressure

By H. L. Langhaar and A. P. Boresi, University of Illinois

With 1 Figure

**Abstract.** A general formula is derived for the strain energy of a ring-reinforced elastic cylindrical shell in terms of the displacement vector of the middle surface. Quadratic terms in the strain tensor are retained. The strain-energy formula is used to develop the infinitesimal theory of buckling of a cylindrical shell that is subjected to uniform external pressure and an axial compressive force. Large deformations, post-buckling behavior, and effects of imperfections are not investigated.

Critical pressures less than those of the classical von Mises theory are obtained. In some cases, the difference is as great as 25 per cent.

**Zusammenfassung.** Eine allgemeine Gleichung wird hergeleitet für die Deformationsenergie einer ringversteiften Zylinderschale in Abhängigkeit vom Verschiebungsvektor der Mittelfläche. Quadratische Glieder des Deformationstensors sind beibehalten. Die Deformationsenergiegleichung wird zur Entwicklung einer Infinitesimaltheorie für das Beulen einer Zylinderschale benutzt, welche einem gleichmäßigen Außendruck und einer axialen Druckkraft ausgesetzt ist. Endliche Verformungen, das Verhalten nach eingetretenem Verbeulen sowie der Einfluß von Imperfektionen werden nicht untersucht.

Es werden Beuldrücke erhalten, die kleiner sind (in manchen Fällen bis zu 25%) als jene, die sich nach der klassischen Theorie von v. Mises ergeben.



## Introduction

Theoretical and experimental studies of the collapsing pressures of cylindrical shells have been conducted by numerous investigators. An account of the history of the problem (to 1947) is contained in the work of Batdorf<sup>1</sup>.

Von Mises<sup>2</sup> and most of the subsequent investigators implicitly based their analyses on the principle that a motionless conservative mechanical system becomes unstable when the value of its potential energy ceases to be a relative minimum. The theory of buckling that is based on this criterion is called the "infinitesimal theory", since investigations of relative minima require only infinitesimal variations. The buckling load determined by the infinitesimal theory has been designated by Friedrichs as the "Euler critical load", since Euler used the infinitesimal theory in his study of columns. The present analysis bases the Euler critical pressure directly on the principle of minimum potential energy. Some comparative tables of results are given at the end of this paper.

Related investigations<sup>3-6</sup> have shown that a cylindrical shell that is subjected to external pressure is susceptible to snap-through. Consequently, buckling may be precipitated by initial jars or dents. However, the Euler critical pressure is of interest since it is an upper bound for the actual buckling pressure. Therefore, practical significance may be ascribed to the fact that the present analysis without empirical modifications that are often used in engineering applications of shell-buckling theory, leads to an Euler critical pressure considerably less than that derived by von Mises, particularly for short shells.

## Symbols

$a$	mean radius of the shell
$L$	length of the shell
$h$	thickness of the shell
$p$	pressure on the lateral surface of the shell
$p_{cr}$	Euler critical pressure
$F$	axial compressive force that acts on the shell. If the axial compression results from the pressure $p$ on the ends, $F = \pi a^2 p$
$E$	Young's modulus
$G$	shear modulus
$\nu$	Poisson's ratio
$n$	number of complete waves in a cross section of the buckled shell
$x, \theta, r$	Cylindrical coordinates. The origin of the axial coordinate $x$ is the center section of the shell

<sup>1</sup> S. B. Batdorf: A Simplified Method of Elastic-Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells. I-Donnell's Equation, NACA TN No. 1341, June, 1947.

<sup>2</sup> S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1936.

<sup>3</sup> L. H. Donnell: Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders Under External Pressure. Jour. App. Mech., Vol. 23, No. 4, pp. 569-575, Dec., 1956.

<sup>4</sup> H. L. Langhaar and A. P. Boresi: Snap-Through and Post-Buckling Behavior of Cylindrical Shells Under the Action of External Pressure. Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bulletin, No. 443, Apr., 1957.

<sup>5</sup> A. F. Kirstein and E. Wenk jr.: Observations of Snap-Through Action in Thin Cylindrical Shells under External Pressure, U. S. Navy Department, The David W. Taylor Model Basin, Report 1062, NS 731-038.

<sup>6</sup> J. Kempner, K. A. Pandalai, S. A. Patel, and J. Crouzet-Pascal: Postbuckling Behavior of Circular Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure. Jour. Aero. Sci., Vol. 24, No. 4, pp. 253-264, Apr., 1957.

$z$	thickness coordinate. $z$ denotes the distance of a particle from the middle surface. Positive $z$ is measured outward. For the undeformed shell, $z = r - a$
$\epsilon_x', \epsilon_\theta', \frac{1}{2}\gamma_{x\theta}'$ $u', v', w'$	The strain tensor of the middle surface axial, circumferential, and radial displacement components of a point on the middle surface. The radial displacement $w'$ is measured positively outward. After the article Potential Energy, primes denoting the middle surface are discarded, since attention is confined to the middle surface
$\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$	variables associated with the changes of curvature of the middle surface
$N$	number of reinforcing rings
$c_1, c_2, \dots$	the coordinates $x$ of the reinforcing rings
$b$	ring spacing
$U_m$	the part of the strain energy that results from straining of the middle surface
$U_b$	the part of the strain energy that results from bending of the shell
$U_r$	the strain energy of a reinforcing ring
$\Omega$	potential energy of the external forces
$V$	total potential energy of the shell; $V = U_m + U_b + \Omega + \Sigma U_r$
$A_r$	the cross-sectional area of the reinforcing ring
$Q_r$	first moment of the cross section of a reinforcing ring about the line $z = 0$
$I_r$	moment of inertia of the cross section of a reinforcing ring about the line $z = 0$

### Basic Equations

Love<sup>7</sup> has derived the general equations for the components of the strain tensor in rectangular coordinates. Transforming his equations to cylindrical coordinates  $(x, \theta, r)$  by tensor theory, and using the customary engineering notations for strain, we obtain

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= u_x + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) \\ \epsilon_\theta &= \frac{v_\theta + w}{r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_\theta + w}{r}\right)^2 + \left(\frac{w_\theta - v}{r}\right)^2\right] \\ \gamma_{x\theta} &= v_x + \frac{u_\theta}{r} + u_x\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + v_x\left(\frac{v_\theta + w}{r}\right) + w_x\left(\frac{w_\theta - v}{r}\right),\end{aligned}\tag{1}$$

where  $(u, v, w)$  are the  $(x, \theta, r)$  components of the displacement vector. (Positive  $w$  outward.) Subscripts on  $(u, v, w)$  denote partial derivatives.

The stresses  $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{rx}$  are neglected. Then, by the theory of plane stress, the strain energy density is

$$W = \frac{G}{1-\nu} [\epsilon_x^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_\theta + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{x\theta}^2].\tag{2}$$

Since  $\tau_{r\theta}$  and  $\tau_{rx}$  are neglected, the shearing strains  $\gamma_{r\theta}$  and  $\gamma_{rx}$  are also neglected. Furthermore, for determining how the displacement vector varies through the thickness of the shell, we neglect the effects of the radial strain  $\epsilon_r$ , although this assumption is not exactly consistent with the previous assumption,  $\sigma_r = 0$ . The relations  $\epsilon_r =$

<sup>7</sup> A. E. H. Love: The Mathematical Theory of Elasticity. 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1934.

$=\gamma_{r\theta}=\gamma_{rx}=0$  are equivalent to the Kirchhoff assumption that normals to the middle surface remain straight, normal, and inextensional. The justification for this assumption has been discussed by Novozhilov<sup>8</sup>.

The Kirchhoff assumption signifies that the displacement vector varies linearly through the thickness; that is,

$$u=u'+z\alpha, \quad v=v'+z\beta, \quad w=w'+z\gamma, \quad (3)$$

where  $(u', v', w')$  are the values of  $(u, v, w)$  on the middle surface of the shell, and  $z$  is the normal distance from the middle surface (positive outward). By the Kirchhoff assumption,  $z$  is unchanged by the deformation.

To express the coefficients  $(\alpha, \beta, \gamma)$  in terms of  $(u', v', w')$ , let  $(X, Y, Z)$  be rectangular coordinates, such that the  $X$  axis coincides with the axis of the undeformed shell. A point on the middle surface of the undeformed shell is defined by the axial coordinate  $X=x$  and the angular coordinate  $\theta$ . The coordinates of the corresponding point in the deformed shell are

$$X=x+u', \quad Y=(a+w')\cos\theta-v'\sin\theta, \quad Z=(a+w')\sin\theta+v'\cos\theta. \quad (4)$$

Since  $(u', v', w')$  are tentatively regarded as known functions of  $(x, \theta)$ , Eq. (4) may be regarded as parametric equations of the deformed middle surface.

By differential geometry<sup>9</sup>, the coefficients of the first fundamental form of the deformed middle surface are

$$\begin{aligned} E &= X_x^2 + Y_x^2 + Z_x^2, & F &= X_x X_\theta + Y_x Y_\theta + Z_x Z_\theta \\ G &= X_\theta^2 + Y_\theta^2 + Z_\theta^2, \end{aligned}$$

where subscripts denote partial derivatives. Hence, by Eq. (4),

$$\begin{aligned} E &= (1+u_x')^2 + (v_x')^2 + (w_x')^2 \\ F &= (1+u_x')u_\theta' + aNw_x' + a(1+M)v_x' \\ G &= (u_\theta')^2 + a^2(1+M)^2 + a^2N^2, \end{aligned} \quad (5)$$

where, for brevity,

$$M = \frac{v_\theta' + w'}{a}, \quad N = \frac{w_\theta' - v'}{a}. \quad (6)$$

Also, the following conventional notation is adopted:

$$D = \sqrt{EG - F^2}. \quad (7)$$

Since Eq. (4) are parametric equations of the deformed middle surface, it is a routine problem of differential geometry to determine the direction of the normal to the deformed middle surface. Then  $(\alpha, \beta, \gamma)$  are easily computed. For brevity, the details of this analysis are omitted. The result is

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{D} [-(1+M)w_x' + Nv_x'] \\ \beta &= \frac{a}{D} \left[ -(1+u_x')N + \frac{u_\theta'w_x'}{a} \right] \\ \gamma &= -1 + \frac{a}{D} \left[ (1+u_x')(1+M) - \frac{u_\theta'v_x'}{a} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>8</sup> V. V. Novozhilov: Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Graylock Press, Rochester, New York, 1953.

<sup>9</sup> D. Struik: Differential Geometry. Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass., 1950.



Equations (3) and (8) are valid for arbitrarily large deflections; they entail no approximation other than the Kirchhoff assumption.

If Eqs. (3) are substituted into Eq. (1), the strain components are expressed as functions of  $z$ . Retention of the nonlinear terms in  $z$  would lead to the type of refinement that Winkler introduced into the theory of curved beams. This would introduce unnecessary complications in a theory of thin shells. Consequently, Eq. (1) is linearized in  $z$ . It then yields relations of the form,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + z \kappa_x, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta' + z \kappa_\theta, \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}' + z \kappa_{x\theta}, \quad (9)$$

where the primed quantities are the strain components of the middle surface. The coefficients  $\kappa_x$ ,  $\kappa_\theta$ ,  $\kappa_{x\theta}$  were introduced by Love\*; they are associated with the changes of curvature of the middle surface. Substituting Eq. (3) into Eq. (1), setting  $r = a + z$ , expanding by the binomial series to first powers of  $z$ , and comparing the results with Eq. (9), we obtain

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \alpha_x (1 + u_x') + \beta_x v_x' + \gamma_x w_x' \\ \kappa_\theta &= \frac{\beta_\theta + \gamma}{a} + \frac{M}{a} + \frac{u_\theta' a}{a^2} + M \frac{\beta_\theta + \gamma}{a} + N \frac{\gamma_\theta - \beta}{a} - \frac{1}{a} \left( \frac{u_\theta'}{a} \right)^2 - \frac{M^2}{a} - \frac{N^2}{a} \\ \kappa_{x\theta} &= \beta_x + \frac{\alpha_\theta}{a} - \frac{u_\theta'}{a^2} + \alpha_x \frac{u_\theta'}{a} + \alpha_\theta \frac{u_x'}{a} + M \beta_x + v_x' \frac{\beta_\theta + \gamma}{a} + w_x' \frac{\gamma_\theta - \beta}{a} + \\ &\quad + N \gamma_x - \frac{u_x' u_\theta'}{a^2} - \frac{M v_x'}{a} - \frac{N w_x'}{a}, \end{aligned} \quad (10)$$

where subscripts on  $(\alpha, \beta, \gamma)$  denote partial derivatives.

The coefficients  $\kappa_x$ ,  $\kappa_\theta$ ,  $\kappa_{x\theta}$  are complicated functions of  $(u', v', w')$ . A part of the difficulty stems from the function  $D$  which is the square root of a fourth degree polynomial in  $(u', v', w')$  and their first derivatives. As an approximation, we perform binomial expansions that lead to quadratic expressions for  $\kappa_x$ ,  $\kappa_\theta$ ,  $\kappa_{x\theta}$  in terms of  $(u', v', w')$  and their first derivatives. To second powers of  $(u', v', w')$ , Eqs. (5) and (7) yield

$$\frac{a}{D} = 1 - M - u_x' + M^2 + M u_x' + (u_x')^2 + \frac{u_\theta' v_x'}{a} - \frac{1}{2} N^2 - \frac{1}{2} (w_x')^2. \quad (11)$$

Accordingly, to second powers of  $(u', v', w')$ , Eq. (8) yields

$$\begin{aligned} \alpha &= -w_x' + N v_x' + u_x' w_x' \\ \beta &= -N + M N + \frac{u_\theta' w_x'}{a} \\ \gamma &= -\frac{1}{2} N^2 - \frac{1}{2} (w_x')^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Hence, to second powers of  $(u', v', w')$ , Eq. (10) yields

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -w_{xx}' + N v_{xx}' + u_{xx}' w_x' \\ a \kappa_\theta &= -N_\theta - M + M_\theta N + \frac{u_{\theta\theta}' w_x'}{a} - \frac{1}{2} N^2 - \frac{1}{2} (w_x')^2 - \left( \frac{u_\theta'}{a} \right)^2 - M^2 \\ a \kappa_{x\theta} &= -a N_x - w_{x\theta}' - \frac{u_\theta'}{a} + a N M_x + 2 w_x' u_{x\theta}' + N v_{x\theta}' - \frac{u_x' u_\theta'}{a} - M v_x'. \end{aligned} \quad (13)$$

It appears that the axial displacement  $u'$  has only a small effect on the bending of the shell. Consequently, quadratic terms in  $u'$  will be dropped from Eq. (13). Then  $u'$

\* See p. 191.

remains only in the equation for  $\kappa_{x\theta}$ . The linear terms in  $u'$  and  $v'$  that occur in  $\kappa_{x\theta}$  represent the bending effect due to rotation about a radial axis. In other words, an element of a cylinder is bent if it is rotated about its normal line and is simultaneously deformed so that it remains in the original cylindrical surface. To first degree terms, rotations of normal sections of the middle surface about their normal lines are determined solely by  $u'_\theta$  and  $v'_x$ . Apparently, the bending due to rotations of elements about radial lines is small. Consequently, the linear terms in  $(u', v')$  will be discarded from the equation for  $\kappa_{x\theta}$ . This approximation was discussed by Koiter\*. Accordingly, Eq. (13) reduces to

$$\begin{aligned}\kappa_x &= -w_{xx}' + N v_{xx}' \\ a \kappa_\theta &= -\frac{w_{\theta\theta}' + w'}{a} + M_\theta N - \frac{1}{2} N^2 - \frac{1}{2} (w_x')^2 - M^2 \\ a \kappa_{x\theta} &= -2 w_{x\theta}' + a N M_x + N v_{x\theta}' - M v_x'.\end{aligned}\quad (14)$$

Also, setting  $r=a$ , we obtain from Eq. (1),

$$\begin{aligned}\epsilon_x' &= u_x' + \frac{1}{2} [(u_x')^2 + (v_x')^2 + (w_x')^2] \\ \epsilon_\theta' &= M + \frac{1}{2} [(u_\theta'/a)^2 + M^2 + N^2] \\ \gamma_{\theta x}' &= v_x' + (u_\theta'/a) + u_x' (u_\theta'/a) + M v_x' + N w_x'.\end{aligned}\quad (15)$$

### Potential energy

The formula for the strain energy of the shell is  $U = \int \int \int r W dx d\theta dz$  where  $W$  is the strain energy density. If the shell is thin, there is little error in the approximation  $r=a$ . Then

$$U = a \int \int W dx d\theta dz. \quad (16)$$

Substituting Eqs. (2) and (9) into Eq. (16), and integrating with respect to  $z$ , we obtain

$$U = U_m + U_b \quad (17)$$

where the membrane energy  $U_m$  is proportional to the thickness  $h$ , and the bending energy  $U_b$  is proportional to  $h^3$ . The following formulas are obtained:

$$U_m = \frac{G a h}{1-\nu} \int \int [(\epsilon_x')^2 + (\epsilon_\theta')^2 + 2 \nu \epsilon_x' \epsilon_\theta' + \frac{1}{2} (1-\nu) (\gamma_{x\theta}')^2] dx d\theta \quad (18)$$

$$U_b = \frac{G a h^3}{12(1-\nu)} \int \int [\kappa_x^2 + \kappa_\theta^2 + 2 \nu \kappa_x \kappa_\theta + \frac{1}{2} (1-\nu) \kappa_{x\theta}^2] dx d\theta. \quad (19)$$

Eqs. (14), (15), (18), and (19) serve to express the strain energy in terms of the displacements of the middle surface.

The assumptions that have been introduced apply equally to the shell and the reinforcing rings, provided that the rings are attached securely to the shell. Consequently, the hoop strain  $\epsilon_\theta$  at any point in a ring is determined by Eq. (9), where  $\epsilon_\theta'$  is the hoop strain at the middle surface of the shell adjacent to the ring, and  $\kappa_\theta$  is the incremental curvature of the ring. The strain energy of the ring is

$$U_r = \frac{1}{2} E a \int \int \epsilon_\theta^2 dA_r d\theta. \quad (20)$$

where  $dA_r$  is an element of cross-sectional area of the ring.

\* See <sup>13</sup>, p. 203.

The following notations are useful:

$$\int dA_r = A_r, \quad \int z dA_r = Q_r, \quad \int z^2 dA_r = I_r. \quad (21)$$

The quantities  $Q_r$  and  $I_r$  are the first and second moments of the cross section of the ring with respect to the line  $z=0$ .

Introducing Eq. (9) into Eq. (20), we obtain with the aid of Eq. (21),

$$U_r = \frac{1}{2} E a \int_0^{2\pi} [A_r (\varepsilon_\theta')^2 + 2 Q_r \varepsilon_\theta' \kappa_\theta + I_r \kappa_\theta^2] d\theta, \quad (22)$$

The axial displacement  $u$  has little effect on the bending of the ring. Consequently, in the expressions for  $\varepsilon_\theta'$  and  $\kappa_\theta$  (Eqs. 14 and 15), the terms containing  $u'$  may be neglected, in so far as Eq. (22) is concerned. Eq. (22) is valid even though the centroidal axis of the ring does not coincide with the middle surface of the shell; the term containing  $Q_r$  takes care of the offset.

If the shell is subjected to uniform hydrostatic pressure  $p$ , the potential energy of the external forces is  $\Omega = p \Delta Q$ , where  $\Delta Q$  is the increment of volume due to the deformation. The volume enclosed by the middle surface of the shell is

$$Q = \iint X n_X dS, \quad (23)$$

where  $dS$  is an element of area of the middle surface, and  $n_X$  is the  $X$  component of the outward-directed unit normal vector. The integral extends over the end plates, as well as the lateral surface. Eq. (23) is a special result of the divergence theorem. Although the pressure acts on the exterior surface instead of the middle surface, this effect is neglected.

According to differential geometry \*, an element of area of the deformed middle surface is  $dS = D dx d\theta$ , where  $D$  is defined by Eq. (7). Also,  $X = x + u'$ . Hence, by Eq. (23),

$$Q = \int_{\text{lateral surface}} \int (x + u') D n_X dx d\theta + \int_{\text{ends}} \int (x + u') n_X dS. \quad (24)$$

Since the strain energy of the end plates is not considered, it would be incorrect to take the deformation of the end plates into account in the calculation of the potential energy of the external forces. Seemingly, the deformation of the end plates has little effect on the buckling of the shell, except in so far as constraints of the lateral wall are concerned. Therefore, for the calculation of  $\Omega$ , we suppose that the end plates are rigid. Then  $u' = \text{constant}$  on either end. Also,  $n_X = \pm 1$  on an end plate. Hence, if the ends are initially located at  $x = \pm L/2$ , and if the deformation is symmetrical about the plane  $x=0$ ,

$$Q = 2 \int_0^{L/2} dx \int_0^{2\pi} (x + u') D n_X d\theta + \int_{x=L/2} \int (x + u') dS - \int_{x=-L/2} \int (x + u') dS. \quad (25)$$

Since the end plates are rigid,  $\int \int dS = \pi a^2$ . Consequently, since the initial volume of the shell is  $\pi a^2 L$ , Eq. (25) yields

$$\Delta Q = 2 \int_0^{L/2} dx \int_0^{2\pi} (x + u') D n_X d\theta + \pi a^2 e,$$

\* See <sup>9</sup>, p. 192.



where  $e$  is the over-all axial extension of the shell. Multiplying by the pressure  $p$ , and noting that the axial compression force in the shell is  $F = \pi a^2 p$ , we obtain

$$\Omega = 2 p \int_0^{L/2} dx \int_0^{2\pi} (x + u') D n_x d\theta + F e.$$

With the geometric formula for  $D n_x$ , this yields

$$\Omega = 2 p a \int_0^{L/2} dx \int_0^{2\pi} (x + u') [-(1 + M) w_x' + N v_x'] d\theta + F e. \quad (26)$$

Eq. (26) is not rigorously valid unless the end plates are rigid. In particular, this condition means that  $v' = 0$  and  $w' = 0$  at either end. Seemingly, however, the restrictions may be relaxed. The equation remains approximately valid even though the axial force  $F$  does not result from hydrostatic pressure on the ends. In particular, it should be expected to apply if  $F = 0$ . Also, the equation may presumably be applied with a mean value of  $e$  if the end plates warp, provided that  $v'$  and  $w'$  vanish at the ends. The term  $u'$  will be discarded from Eq. (26), since it apparently contributes very little to the potential energy of the pressure acting on the lateral wall. Then integration by parts yields the following formula for  $\Omega$ :

$$\Omega = 2 p a \int_0^{L/2} dx \int_0^{2\pi} [w' (1 + M + x M_x) - v' (N + x N_x)] d\theta + F e. \quad (27)$$

The total potential energy of the shell is  $V = U_m + U_b + \Omega + \Sigma U_r$ , where  $\Sigma U_r$  denotes the sum of the strain energies of the reinforcing rings. The components  $U_m$ ,  $U_b$ ,  $U_r$ , and  $\Omega$  are determined by Eqs. (18), (19), (22), and (27). In conjunction with Eqs. (6), (14), and (15), these equations serve to express the total potential energy  $V$  in terms of the displacement vector of the middle surface of the shell.

### Trigonometric expansions

In what follows, there is no occasion to consider displacements or strains at points that do not lie on the middle surface. Consequently, primes will be discarded, with the understanding that henceforth  $(u, v, w)$  and  $(\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma_{x\theta})$  denote displacements and strains of the middle surface. Also, we shall let the length of the shell be  $\pi$ . This is legitimate, since only ratios of lengths are significant. Since  $L = \pi$ , the subsequent equations appear to be dimensionally nonhomogeneous.

Attention is restricted to shells that are simply supported at the ends; that is, the end plates transmit no bending moments to the shell. The following deflection pattern is assumed:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + x_1 \sin x \cos n \theta \\ v &= y_1 \cos x \sin n \theta \\ w &= (z_0 + z_1 \cos n \theta) \cos x. \end{aligned} \quad (28)$$

Here,  $x_1, y_1, z_0, z_1$  are constants, and  $u_0$  is a function of  $x$ . The integer  $n$  represents the number of complete waves in the periphery of the buckled shell. In all cases,  $n \geq 2$ . Eqs. (28) provide the proper symmetry properties (oddness or evenness) to the functions  $(u, v, w)$ . Also, they conform to the boundary conditions,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , and  $w_{xx} = 0$  for  $x = \pi/2$ . It is well known that an approximation such as Eq. (28) yields a buckling load that is too high.

If Eq. (28) is substituted into Eqs. (14), (15), (18), (19), (22), and (27), the total potential energy  $V$  is expressed as a polynomial in the variables  $(x_1, y_1, z_0, z_1)$  and an integral containing  $u_0$ . Quadratic terms in  $du_0/dx$  are discarded from Eq. (14). Then  $u_0$  enters into  $V$  only in the form of the derivative  $\dot{u}_0 = du_0/dx$ . Consequently, by principles of the calculus of variations,  $\dot{u}_0$  is easily determined to minimize  $V$ . Thus,  $u_0$  is eliminated, and  $V$  is expressed as a fourth degree polynomial in  $x_1, y_1, z_0, z_1$ . However, the fourth degree terms have no effect on the Euler critical load. Furthermore, it is shown subsequently that only the third degree terms containing  $z_0$  are significant. These terms are important in  $U_m$ , but they have little effect on  $U_b$  or  $U_r$ . Consequently, quadratic approximations of  $U_b$  and  $U_r$  are used.

The details of the computation of  $V$  are lengthy but routine. The final results are

$$\begin{aligned}
 U_m = \frac{\pi E h a}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\pi}{4} \left[ \left( 1 + \frac{(1-\nu)n^2}{2a^2} \right) x_1^2 + \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{1-\nu}{2} \right) y_1^2 + \frac{2(1-\nu^2)}{a^2} z_0^2 + \frac{z_1^2}{a^2} + \right. \right. \\
 + \frac{2n y_1 z_1}{a^2} + \frac{(1+\nu)n x_1 y_1}{a} + \frac{2\nu x_1 z_1}{a} \left. \right] + \\
 + \left[ \frac{2}{3} + \frac{4\nu}{3a^2} - \frac{n^2(1-\nu)}{3a^2} \right] x_1 z_0 z_1 + \frac{4(1-\nu^2)z_0^3}{3a^3} + \\
 + \left[ \frac{2(3n^2+1)-2\nu^2(n^2+1)}{3a^3} \right] y_1^2 z_0 + \\
 + \left[ \frac{8n(2-\nu^2)+na^2(3\nu-1)}{3a^3} \right] y_1 z_0 z_1 + \\
 + \left[ \frac{2(n^2+3)+2\nu a^2-2\nu^2(n^2+1)}{3a^3} \right] z_0 z_1^2 + \frac{4\nu n}{3a^2} x_1 y_1 z_0 + \\
 \left. + \frac{n^2(1-\nu^2)}{3a^3} x_1^2 z_0 \right\}; \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$U_b = \frac{\pi^2 E h^3}{48(1-\nu^2)a} \left\{ \left( 2a^2 + \frac{2}{a^2} - 4\nu \right) z_0^2 + \left[ a^2 + \frac{(n^2-1)^2}{a^2} + 2(n^2-\nu) \right] z_1^2 \right\}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 U_r = \frac{\pi E}{2a} \cos^2 c_r \left\{ 2 \left( A_r - \frac{2Q_r}{a} + \frac{I_r}{a^2} \right) z_0^2 + n^2 A_r y_1^2 + \right. \\
 + \left[ A_r + \frac{2Q_r}{a} (n^2-1) + \frac{I_r}{a^2} (n^2-1)^2 \right] z_1^2 + \\
 \left. + 2n \left[ A_r + \frac{Q_r}{a} (n^2-1) \right] y_1 z_1 \right\}; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega = 2\pi p a \left[ 2z_0 + \frac{\pi z_0^2}{4a} + \frac{\pi(y_1^2 + 2n y_1 z_1 + z_1^2)}{8a} \right] - F \left\{ \frac{\pi}{8} (x_1^2 + y_1^2 + 2z_0^2 + z_1^2) + \right. \\
 \left. + \frac{\pi\nu}{8a^2} \left[ n^2 x_1^2 + 2z_0^2 + (n^2+1) y_1^2 + (n^2+1) z_1^2 + 4n y_1 z_1 \right] + \frac{2\nu}{a} z_0 \right\}. \quad (32)
 \end{aligned}$$

An irrelevant additive constant in  $U_m$  is not retained.

### Infinitesimal theory of buckling

The generalized coordinates of the problem are  $x_1, y_1, z_0, z_1$ . These will be designated as  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , respectively.

For the infinitesimal theory of buckling, the total potential energy  $V$  may be approximated as a cubic polynomial in  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; that is,

$$V = \Sigma \Sigma \Sigma b_{ijk} x_i x_j x_k + \Sigma \Sigma b_{jk} x_j x_k + \text{linear terms}.$$

The coefficients  $b_{ijk}$  and  $b_{jk}$  are symmetrical in their indexes. Let the variables  $x_i$  take variations  $\xi_i$ . Then,

$$V + \Delta V = \Sigma \Sigma \Sigma b_{ijk} (x_i + \xi_i) (x_j + \xi_j) (x_k + \xi_k) + \Sigma \Sigma b_{jk} (x_j + \xi_j) (x_k + \xi_k) + \dots$$

The increment  $\Delta V$  may be expressed as a series:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \dots$$

Here,  $\delta V$  is a linear form in  $\xi_i$ ;  $\delta^2 V$  is a quadratic form in  $\xi_i$ , etc. Hence, in view of the symmetry of the coefficients  $b_{ijk}$ ,

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = 3 \Sigma \Sigma \Sigma b_{ijk} \xi_i \xi_j x_k + \Sigma \Sigma b_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Set

$$P_{ij} = 3 \sum_{k=1}^4 b_{ijk} x_k + b_{ij}. \quad (33)$$

Then

$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \Sigma \Sigma P_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (34)$$

The coefficients  $P_{ij}$  are linear functions of  $x_i$ . In the present case, only  $x_3$  (that is,  $z_0$ ) is different from zero, since the unbuckled form is axially symmetrical. Consequently, the sum in Eq. (33) contains only one nonzero term. Therefore, to compute  $\delta^2 V$ , we do not require all the coefficients  $b_{ijk}$ ; we need only those for which  $k=3$ . Accordingly, in the expression for  $V$ , we require only the cubic terms that contain  $z_0$ .

If the end plates are very flexible, no forced boundary conditions are imposed on  $u$ . Consequently,  $x_1$  is unrestricted. Then the stability criterion is that  $\delta^2 V$  be positive definite. In turn, this condition requires that the determinant of the matrix  $(P_{ij})$  and the determinants of the submatrices obtained by striking out right hand columns and bottom rows shall be positive. Consequently, buckling occurs if any of these determinants is zero. The determinant of the entire matrix  $(P_{ij})$  is always the first to vanish, since the vanishing of a subdeterminant implies the buckling of a system that is constrained by elimination of some of the degrees of freedom. Consequently, the buckling criterion is

$$\det (P_{ij}) = 0. \quad (35)$$

Eqs. (29), (30), (31), (32), and (33) yield

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{\pi E h}{4(1-\nu^2)a} \left[ a^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 \right] - \frac{F}{8a^2}(a^2 + \nu n^2) + \frac{E h n^2}{3a^2} z_0 \\ P_{12} &= \frac{E h}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{8}\pi(1+\nu)n + \frac{2\nu n z_0}{3a} \right] \\ P_{14} &= \frac{E h}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\pi\nu}{2} + [2a^2 + 4\nu - n^2(1-\nu)] \frac{z_0}{3a} \right\} \\ P_{22} &= \frac{E h}{(1-\nu^2)a} \left\{ \frac{\pi}{4} \left( n^2 + \frac{1-\nu}{2} a^2 \right) + \frac{2z_0}{3a} [3n^2 + 1 - \nu^2(n^2 + 1)] \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi p}{4} - \frac{F}{8a^2} [a^2 + \nu(n^2 + 1)] + \frac{E n^2}{2a} \sum_{\text{rings}} A_r \cos^2 c_r \\ P_{24} &= \frac{E h n}{2(1-\nu^2)a} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{z_0}{3a} [8(2-\nu^2) + a^2(3\nu-1)] \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi n p}{4} - \frac{\nu n F}{4a^2} + \frac{E n}{2a} \sum_{\text{rings}} \left[ A_r + (n^2 - 1) \frac{Q_r}{a} \right] \cos^2 c_r \end{aligned} \quad (36)$$



$$\begin{aligned}
P_{44} = & \frac{Eh}{(1-\nu^2)a} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2z_0}{3a} [(n^2+3) + \nu a^2 - \nu^2(n^2+1)] \right\} + \\
& + \frac{\pi E h^3}{48(1-\nu^2)a^3} [a^4 + 2(n^2-\nu)a^2 + (n^2-1)^2] + \frac{\pi p}{4} - \frac{F}{8a^2} [a^2 + \nu(n^2+1)] + \\
& + \frac{E}{2a} \sum_{\text{rings}} \left[ A_r + 2(n^2-1) \frac{Q_r}{a} + (n^2-1)^2 \frac{I_r}{a^2} \right] \cos^2 c_r. \\
P_{13} = P_{23} = P_{43} = 0.
\end{aligned}$$

An irrelevant factor  $\pi$  has been removed from each term  $P_{ij}$ . The numbers  $c_r$  are the coordinates of the reinforcing rings. If the reinforcing rings are identical, all factors may be taken outside the sums except  $\cos^2 c_r$ . For equally spaced rings,  $\sum \cos^2 c_r = (N+1)/2$ , where  $N$  is the number of rings. Eq. (36) appears to be dimensionally incorrect because  $L$  has been set equal to  $\pi$ .

The term  $z_0$  that occurs in Eq. (36) represents the deformation before buckling. This may be derived by the principle of stationary potential energy. For the unbuckled form,  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ . Introducing these simplifications into Eq. (29), (30), (31), and (32), and setting  $V = U_m + U_b + \Omega + \Sigma U_r$ , we obtain from the equation  $dV/dz_0 = 0$ ,

$$z_0 = \frac{-\frac{4pa}{\pi} + \frac{2\nu F}{\pi^2 a}}{\frac{Eh}{a} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a} \left( a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\nu \right) + \frac{2E}{\pi a} \sum_{\text{rings}} \left( A_r - \frac{2Q_r}{a} + \frac{I_r}{a^2} \right) \cos^2 c_r}. \quad (37)$$

Eqs. (36) and (37) show that the coefficients  $P_{ij}$  are linear functions of  $p$  and  $F$ .

Since  $P_{31} = P_{32} = P_{34} = 0$  and  $P_{33} \neq 0$ , the buckling criterion becomes

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{14} \\ P_{12} & P_{22} & P_{24} \\ P_{14} & P_{24} & P_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

It may be shown that, when the cylinder becomes infinitely long, the preceding formulas are consistent with the buckling formula for a ring.

### Numerical example

W. A. Nash<sup>10</sup> has given experimental data for a steel cylinder reinforced by 11 rings. The dimensions of the cylinder are shown in Fig. 1. The reinforcing rings were machined on the cylinder.

To apply the present theory, we must scale all lengths by the factor  $\pi/27.96$ , so that the length of the cylinder is reduced to  $\pi$ . The scaled dimensions are  $a = 0.90424$ ,  $h = 0.010955$ ,  $L = \pi$ ,  $b = 0.28202$ , Ring width = 0.022472, Ring depth = 0.033708. Hence, the section properties of a ring are  $A_r = 0.00075749$ ,  $Q_r = 0.000016916$ ,  $I_r = 0.00000044948$ . If the rings are numbered from  $-5$  to  $+5$ , the following locations of the rings are determined:  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0.28202$ ,  $c_2 = 0.56405$ ,  $c_3 = 0.84607$ ,  $c_4 = 1.12810$ ,  $c_5 = 1.41012$ ,  $c_i = -c_{-i}$ . Hence,  $\sum \cos^2 c_r = 5.5706$ .

<sup>10</sup> W. A. Nash: General Instability of Ring-Reinforced Cylindrical Shells Subject to Hydrostatic Pressure. Proc. of the Second U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 1955, pp. 359-368.

Since the axial compression resulted from hydrostatic pressure on the ends.  $F = \pi a^2 p$ . Accordingly, if  $E = 1$ , Eq. (37) yields  $z_0/a = -72.432 p$ . Then Eqs. (36) yield

$$P_{11} = 0.0085497 + 0.0036597 n^2 - 0.32109 p - 0.41032 n^2 p$$

$$P_{12} = 0.0061458 n - 0.17440 n p$$

$$P_{14} = 0.0028365 - 0.41205 p + 0.10173 n^2 p$$

$$P_{22} = 0.0029240 + 0.012790 n^2 - 0.23852 p - 1.98859 n^2 p$$

$$P_{24} = 0.012732 n + 0.000057623 n^3 - 1.89289 n p$$

$$P_{44} = 0.012676 + 0.00011181 n^2 + 0.0000018225 n^4 - 1.68199 p - 0.70283 n^2 p.$$

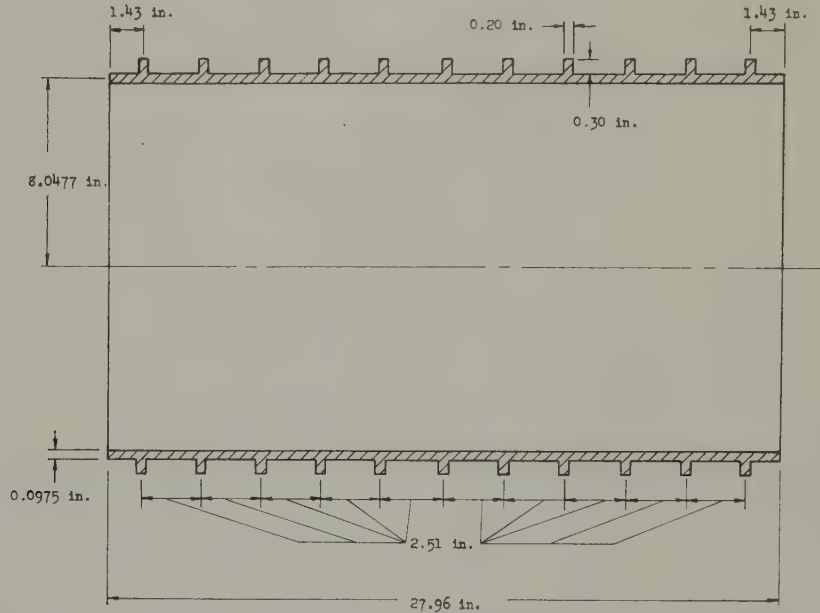


Fig. 1. Experimental Cylindrical Shell Reinforced by 11 Rings (Ref. 10)

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} \quad \nu = 0.30 \quad F = \pi a^2 p$$

It is necessary to try several values of  $n$  until the value is obtained that renders  $p_{cr}$  a minimum. It is found that  $n=3$ . With  $n=3$ , the preceding equations become:

$$P_{11} = 0.041487 - 4.01398 p, \quad P_{12} = 0.018437 - 0.52318 p,$$

$$P_{14} = 0.0028365 + 0.50352 p, \quad P_{22} = 0.11810 - 18.1358 p,$$

$$P_{24} = 0.039752 - 5.67867 p, \quad P_{44} = 0.013830 - 8.00747 p.$$

The Euler critical pressure  $p_{cr}$  is a root of Eq. (38). With the preceding equations for  $P_{ij}$ , the following values of the determinant  $\Delta$  are computed:

$$n = 3$$

$p$	0.00002	0.000025	0.00003
$\Delta$	0.1477	0.0083	-0.1311

By linear interpolation, the value of  $p$  for which  $\Delta$  vanishes is  $p_{cr} = 0.0000253$ , with  $E = 1$ . Since  $p_{cr}$  is proportional to  $E$ ,  $p_{cr} = 759 \text{ lb./in.}^2$  with  $E = 30,000,000 \text{ lb./in.}^2$ . The experimental buckling pressure given by Nash is  $p_{cr} = 675 \text{ lb./in.}^2$ . Accordingly, the value given by the present theory is about 13% higher than the experimental

value. Possibly initial imperfections affected the buckling pressure, although ring reinforcements generally reduce the influence of imperfections. It is possible that the modulus was reduced by inelastic action, since the stress before buckling was approximately 50,000 lb./in.<sup>2</sup>.

## Results

The application of the theory has been illustrated by the previous numerical example. The correlation between theory and experiment is good in this case. A few other experimental results are given in Table 1. They are taken from References 5, 11, and 12. The theoretical values have been computed by the present theory. The agreement between theory and experiment is fair, but the experimental cylinders had unknown end-fixity effects, whereas the theory is restricted to shells with simply supported ends and flexible end plates. Probably the end constraints account for the fact that some of the computed buckling pressures are less than the experimental values. No experimental results were found for very short shells ( $L/a < 1/2$ ). It is in this range that the experimental values are reported to be considerably less than the theoretical values.

Since the theory is rather tedious to apply, some numerical results have been prepared with the aid of the Illiac, an electronic digital computer. Table 2 gives computed values of  $n$  and  $p_{cr}/E$  for cylinders that are loaded by hydrostatic pressure on the lateral surfaces and the ends ( $F = \pi a^2 p$ ) and for cylinders that are loaded on the lateral surfaces only ( $F = 0$ ). For comparison, the results of von Mises' theory (<sup>2</sup>, Eq. (d), Art. 89) are also tabulated. For  $L/a > 1$ , the two theories agree fairly well, but for the short shells there are significant discrepancies. For short shells, the present theory gives lower results than von Mises' theory.

Table 1. Buckling loads for cylindrical shells subjected to external hydrostatic pressure.  $F = \pi a^2 p$

$L/a$	$h/a$	Windenburg's Experiments		Sturm's Experiments		Kirstein-Wenk Experiments		Present Theory	
		$10^6 p/E$	$n$	$10^6 p/E$	$n$	$10^6 p/E$	$n$	$10^6 p/E$	$n$
1	0.00638	3.20	9, 10					2.626	9
0.75	0.00638	3.53	11					3.927	10
0.50	0.00640	5.43	13, 14					5.959	12
1.85	0.00471			0.736	7			0.730	8
1.15	0.002774					0.359	10	0.310	11
0.60	0.00206					0.322	16	0.286	16

<sup>11</sup> H. E. Saunders and Dwight F. Windenburg: Strength of Thin Cylindrical Shells Under External Pressure. Trans. Amer. Soc. of Mech. Eng., Vol. 53, No. 15, pp. 207–218, Sept.-Dec., 1931.

<sup>12</sup> R. G. Sturm: A Study of the Collapsing Pressure of Thin-Walled Cylinders. Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bulletin, No. 329, Nov., 1941.



Table 2. Euler critical pressure  $(p_{cr}/E) \times 10^6$  for cylinder loaded by hydrostatic pressure

$L/a$	$h/a$	Pressure on the lateral surface and the ends				Pressure on the lateral surface only			
		present theory		von Mises's theory		present theory		von Mises's theory	
		$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$
0.2	.005	17	8.594	18	10.414	18	10.850	20	13.787
0.2	.010	11	55.656	14	65.858	12	79.660	18	97.823
0.2	.015	8	175.664	11	198.424	9	281.800	17	317.922
0.4	.005	14	4.033	15	4.575	15	4.457	15	5.206
0.4	.010	11	23.132	12	27.225	12	26.956	13	33.011
0.4	.015	9	65.382	10	78.207	10	79.019	11	99.284
0.6	.005	12	2.661	12	2.938	13	2.844	13	3.180
0.6	.010	10	15.143	10	17.078	10	16.651	11	19.423
0.6	.015	9	42.163	9	48.244	9	47.318	9	56.582
0.8	.005	11	1.975	11	2.143	11	2.064	11	2.282
0.8	.010	9	11.265	9	12.412	9	12.056	9	13.626
0.8	.015	7	32.941	8	34.838	8	33.996	8	39.156
1.0	.005	10	1.570	10	1.693	10	1.623	10	1.777
1.0	.010	8	8.960	8	9.779	8	9.471	8	10.554
1.0	.015	7	24.881	7	27.485	7	26.771	8	30.294
1.2	.005	9	1.302	9	1.403	9	1.338	9	1.463
1.2	.010	8	7.537	8	8.125	8	7.821	8	8.572
1.2	.015	7	20.675	7	22.450	7	21.752	7	24.086
1.4	.005	9	1.130	9	1.210	9	1.150	9	1.247
1.4	.010	7	6.324	7	6.802	7	6.555	7	7.165
1.4	.015	6	17.688	6	19.210	6	18.631	6	20.626
1.6	.005	8	0.968	8	1.034	8	0.985	8	1.066
1.6	.010	7	5.589	7	5.992	7	5.735	7	6.239
1.6	.015	6	15.247	6	16.414	6	15.848	6	17.341
1.8	.005	8	0.873	8	0.934	8	0.884	8	0.956
1.8	.010	6	4.933	6	5.299	6	5.079	6	5.538
1.8	.015	6	13.745	6	14.731	6	14.151	6	15.389
2.0	.005	7	0.772	7	0.826	7	0.783	7	0.847
2.0	.010	6	4.375	6	4.682	6	4.472	6	4.853
2.0	.015	5	12.445	5	13.368	5	12.911	5	14.080
2.4	.005	7	0.652	7	0.696	7	0.656	7	0.707
2.4	.010	6	3.764	6	4.015	6	3.811	6	4.118
2.4	.015	5	10.018	5	10.684	5	10.253	5	11.080
2.5	.005	6	0.632	7	0.671	7	0.637	7	0.683
2.5	.010	5	3.596	5	3.837	5	3.671	5	3.972
2.5	.015	5	9.642	5	10.283	5	9.844	5	10.639
3.0	.005	6	0.509	6	0.544	6	0.511	6	0.551
3.0	.010	5	2.881	5	3.066	5	2.914	5	3.139
3.0	.015	5	8.459	5	9.002	5	8.557	5	9.216
3.2	.005	6	0.481	6	0.515	6	0.483	6	0.522
3.2	.010	5	2.718	5	2.892	5	2.742	5	2.953
3.2	.015	4	7.724	4	8.207	4	7.892	4	8.490

$L/a$	$h/a$	Pressure on the lateral surface and the ends				Pressure on the lateral surface only			
		present theory		von Mises's theory		present theory		von Mises's theory	
		$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$	$n$	$(p_{cr}/E) \times 10^6$
3.6	.005	5	0.439	5	0.468	5	0.441	5	0.476
3.6	.010	5	2.501	5	2.658	5	2.513	5	2.705
3.6	.015	4	6.599	4	6.990	4	6.700	4	7.181
4.2	.005	5	0.360	5	0.383	5	0.360	5	0.387
4.2	.010	4	2.072	4	2.202	4	2.091	4	2.244
4.2	.015	4	5.676	4	6.011	4	5.726	4	6.129
4.8	.005	5	0.320	5	0.340	5	0.320	5	0.344
4.8	.010	4	1.773	4	1.873	4	1.781	4	1.902
4.8	.015	4	5.196	4	5.485	4	5.219	4	5.572
5.0	.005	4	0.308	5	0.331	4	0.349	5	0.334
5.0	.010	4	1.707	4	1.806	4	1.713	4	1.829
5.0	.015	4	5.089	4	5.383	4	5.106	4	5.458
7.0	.005	4	0.214	4	0.225	4	0.213	4	0.227
7.0	.010	3	1.290	3	1.350	3	1.298	3	1.374
7.0	.015	3	3.299	3	3.446	3	3.317	3	3.498
10	.005	3	0.159	3	0.168	3	0.159	3	0.169
10	.010	3	0.852	3	0.886	3	0.851	3	0.895
10	.015	3	2.615	3	2.732	3	2.612	3	2.749
15	.005	3	0.102	3	0.106	3	0.102	3	0.107
15	.010	2	0.688	2	0.663	2	0.698	2	0.668
15	.015	2	1.574	2	1.504	2	1.597	2	1.521
20	.005	3	0.092	3	0.097	3	0.092	2	0.097
20	.010	2	0.414	2	0.409	2	0.418	2	0.411
20	.015	2	1.157	2	1.109	2	1.169	2	1.119
30	.005	2	0.049	2	0.050	2	0.049	2	0.049
30	.010	2	0.309	2	0.309	2	0.312	2	0.309
30	.015	2	0.996	2	0.973	2	1.003	2	0.979
40	.005	2	0.040	2	0.040	2	0.040	2	0.039
40	.010	2	0.291	2	0.282	2	0.293	2	0.281
40	.015	2	0.967	2	0.934	2	0.973	2	0.939
50	.005	2	0.037	2	0.035	2	0.038	2	0.035
50	.010	2	0.286	2	0.272	2	0.288	2	0.275
50	.015	2	0.958	2	0.920	2	0.964	2	0.929

### Acknowledgement

This investigation has been performed in the Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, in cooperation with the Office of Naval Research, U. S. Navy, under Contract N 6-ori-071 (53).

(Received May 30, 1960)

<sup>13</sup> W. T. Koiter: Discussion of paper by H. L. Langhaar. Jour. App. Mech., Vol. 17, No. 1, pp. 107—108, March, 1950.

<sup>14</sup> P. P. Bijlaard: Buckling Under External Pressure of Cylindrical Shells Evenly Stiffened by Rings Only. Jour. Aero. Sci., Vol. 24, No. 6, pp. 437—447, 455, June, 1957.

# Grundlagen einer stochastischen Dauerfestigkeitstheorie\*

Von A. Kyrala, Goodyear, Arizona

Mit 9 Textabbildungen

## I. Einleitung

Es ist eine natürliche Erweiterung der Methoden der statischen Festigkeitslehre (die hier als bekannt vorausgesetzt wird), auch dynamische Spannungsänderungen im Hauptspannungsraum zeitlich zu verfolgen. Wie üblich dienen dabei die drei Hauptspannungen als kartesische Koordinaten eines Punktes und jegliche Änderung des Spannungszustandes führt dann zu einer neuen Lage des Spannungspunktes. Der ganze Raum dieser zulässigen Spannungszustände entspricht dabei nur einer kleinen Umgebung eines einzigen Punktes der materiellen Körper, so daß für eine vollständige Beschreibung der Spannungsverteilung im Körper eine große\*\* Anzahl solcher Hauptspannungsräume erforderlich wäre. Wir nehmen aber hier an, daß der Bereich des Körpers, wo ein Hauptbruch entsteht, genügend klein ist, so daß er durch einen einzigen Spannungszustand beschrieben werden kann. Falls dies nicht zutrifft, kann man auch durch eine statistische Mittelwertbildung mehrere Spannungsräume durch einen einzigen repräsentieren.

Nun weisen Stoffe unter irgendeiner Belastung nur eine endliche Festigkeit auf; daraus muß man folgern, daß es eine geschlossene kritische Fläche um den Spannungsnullpunkt gibt. Außerhalb dieser Fläche befinden sich Spannungszustände, die einem Hauptbruch des Stoffes entsprechen. Nimmt man erfahrungsgemäß im Sinne der Theorie der statischen Festigkeit an, daß hydrostatische Spannungen keine bedeutende Rolle spielen, dann wird die kritische Fläche ein (offener) Drehzylinder um die hydrostatische Achse (d. h. um die Gerade  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Alle Zustände, die sich nur durch achsenparallele Translationen unterscheiden, sind dann als gleichwertig anzusehen und es genügt, Spannungszustände in einem Kreisgebiet (Ursprungsquerschnitt des Drehzylinders) zu betrachten. Es soll hier betont werden, daß zwar gewisse Einzelheiten von dieser vereinfachenden Annahme über die kritische Fläche abhängen, der allgemeine Gedankengang und die Grundbegriffe aber erhalten bleiben, auch wenn man von dieser Annahme Abstand nimmt.

Durch die obigen Überlegungen gelangt man zu einer Darstellung des Spannungszustandes im (künftigen) Bruchurpunkt als Spannungspunkt innerhalb des kritischen Spannungskreises. Ohne Belastung sollte dieser Punkt mit dem Spannungsnullpunkt zusammenfallen. Änderungen des Spannungszustandes führen zu Bewegungen des Spannungszustandspunktes. Falls die äußeren Belastungen sich rein periodisch ändern (mit Mittelspannung Null), wird der Spannungszustandspunkt um den Spannungsnullpunkt schwingen, vorausgesetzt, daß der Stoff sich nach jeder Belastung vollständig erholt. Nur für ideale Kristalle unter sehr kleinen Belastungen dürfte eine solche Annahme annähernd zutreffen. In anderen Stoffen, insbesondere handelsüblichen Metallen und Legierungen, gibt es eine solche Anhäufung von Fehlstellen, daß fast jede Belastung (auch weit unterhalb der makroskopisch definierten Fließgrenze) unvermeidlich zu irreversiblen Gefügeänderungen führen muß. Unter Gefügeänderungen werden hier irgendwelche mikroskopische Änderungen des Rauminhalts oder der Orientierung eines Stoffelements (als Kontinuum angesehen), die zu einer

\* Der Verfasser möchte hier Herrn Prof. Dr. Heinz Parkus seinen besten Dank für vielfache Unterstützung aussprechen. Auch Herrn Prof. J. M. Lessells sei hier für viele anregende Aussprachen über einschlägige experimentelle Literatur und Ergebnisse gedankt.

\*\* Nicht unendlich viele, weil Spannungen nicht in physikalisch sinnvoller Weise über infinitesimale Gebiete definiert werden können.



Änderung des Spannungszustandes führen, verstanden. Selbstverständlich können solche lokale Spannungsänderungen trotz fester Werte der makroskopischen Spannungen vorkommen. Man erinnere sich nur, daß fast alle technischen Spannungsmessungen über Längen durchgeführt werden, die groß sind gegen den Korndurchmesser.

Nun überzeugt man sich leicht, daß der Spannungszustandspunkt bei periodischen Belastungen von handelsüblichen Stoffen sich nicht auf derselben Bahn im Spannungsraum hin und her bewegen, sondern vielmehr eine Irrfahrt ausführen wird. Auf diese Weise wird es erst möglich, daß er zur kritischen Spannungsfläche gelangen kann, auch wenn die Amplitude der Wechselbeanspruchung viel kleiner ist als die statische Festigkeit.

Wesentlich für das Verständnis des Ermüdungsprozesses ist dann die Frage nach dem Korrelationsgrad der Spannungsänderungen, die jeden Belastungszyklus begleiten. Falls vollständige Unabhängigkeit zwischen den Vorgängen jedes einzelnen Belastungszyklus herrscht, dürfte man jeden Zyklus als unabhängigen (Bernoullischen) Versuch\* ansehen. Gewisse Eigenschaften des Ermüdungsvorganges kann man tatsächlich durch solche Bernoullische Modelle erfassen. Diese werden deshalb in den nachstehenden Abschnitten ausführlicher besprochen. Außerdem wird die Annahme der Zyklusunabhängigkeit sich dem Fall der Hochspannungsermüdung (kleine Lastspielzahl) und dem Fall des Schnellbelastungsbruches eher als dem Fall der Niederspannungsermüdung (große Lastspielzahl) anpassen. Infolgedessen können die zwei erst-erwähnten Aufgabenkreise als direkte Anwendungsgebiete der Bernoullischen Modelle angesehen werden.

Im Falle der allgemeinen Ermüdungserscheinungen liegt die Sache etwas anders. Die Bernoullischen Modelle verzichten auf ein „Gedächtnis“ der Stoffe (d. h. ein Verhalten, abhängig von früher erfahrenen Belastungen). Um ein solches Stoffgedächtnis einzuführen, muß man zu einem Markoffschen Modell übergehen, d. h. jede Spannungsänderung während eines Belastungszyklus ist von der Spannungsänderung des angehenden Zyklus abhängig. So bildet die Gesamtheit der Spannungsänderungen eine Irrfahrt im Spannungsraum. Ein besonderer Vorteil dieses Gedankensystems ist eine klarere Einsicht und Präzisierung des Begriffs der unvollständigen Beschädigung bei (unvollendeter) Ermüdung. Letztere kann man nun quantitativ mit Irrfahrtfortschrittsmaßen verfolgen.

Zunächst wird von einem Gedankenmodell der geometrischen Wahrscheinlichkeitslehre ausgegangen. Auf der Basis einer strengen Axiomatik wird der Einfluß der Hypothesen auf den geschilderten Ermüdungsvorgang klargestellt. Es wird gezeigt, wie die mittlere Belastungsspannung einbezogen werden kann und welche Änderung in dem Argument durch Berücksichtigung einer eventuellen Ermüdungsgrenze bewirkt wird.

Von der vereinfachenden Annahme, daß jeder Zyklus ein (unabhängiger) Bernoulli-Versuch sei, wird später Abstand genommen. Dagegen wird der Begriff „Ermüdungsvorgang als Irrfahrtsproblem im Spannungsraum“ eingeführt und der Diffusionsgrenzfall besprochen. Eine formale Majorantenlösung des Irrfahrtsproblems mit fester Schrittlänge wird hergeleitet.

Es sei hier noch auf einen besonderen Unterschied zwischen dem hier vertretenen Gedankengang und dem der atomaren Anschauung hingewiesen. In der modernen Festkörperphysik versucht man meistens die physikalischen Eigenschaften der Stoffe auf die der perfekten Kristalle zurückzuführen. In vielen Fällen sind damit schon bemerkenswerte Erfolge erreicht worden.

---

\* Entkommen des Spannungszustandspunktes aus dem kritischen Kreis.

Es ist aber eine Grundeigenschaft dieser Fragestellung, daß immer ein Vergleich mit einem vollständig geordneten System unternommen wird. Naturgemäß wird mehr oder weniger Übereinstimmung erwartet, je nachdem das untersuchte System weniger oder mehr von dem Vorbild der Vollordnung abweicht. Wenn es um eine ausgesprochene Unordnungserscheinung geht, kann der Vergleich mit den Eigenschaften der perfekten Kristalle Ergebnisse liefern, bei denen nicht einmal Übereinstimmung zwischen den Größenordnungen der beobachteten und der gerechneten Daten erreicht wird. Ein bekanntes Beispiel bietet der Unterschied zwischen theoretischen und beobachteten Festigkeiten der handelsüblichen Metalle. In solchen Fällen ist die Frage naheliegend, ob nicht mehr zu erreichen wäre mit Vollunordnung als Ausgangspunkt. Von diesem Standpunkt aus sind geordnete Systeme als Abweichungen von dem ungeordneten Vergleichssystem zu betrachten. Die vorliegende Arbeit wird anfänglich auf einer solchen Grundlage aufgebaut. Vorausgesetzt werden Stoffe, die jede differentielle Spannungsänderung gleich wahrscheinlich gestatten. Im Gegensatz dazu werden beim perfekten Kristall gewisse Richtungen bevorzugt. Der Grundsatz hier ist aber nicht einfach Isotropie. Zunächst wird angenommen, daß die betrachteten Stoffe so durchsetzt mit Fehlstellen sind, daß bei Wechselbeanspruchung der Spannungszustand im Bruchpunkt nur eine skalare Beziehung zur äußeren Belastung hat. Jede Richtungsempfindlichkeit soll durch die Gefügeunordnung unterdrückt sein.

Indem man schrittweise die Anfangshypothesen durch mildere Beschränkungen ersetzt, gelangt man zu einer Irrfahrtstheorie der Ermüdung, welche die Aufstellung eines umfassenden Begriffsystems der Dauerfestigkeit ermöglicht.

Eine solche mathematische Auffassung wirkt klärend auf gewisse Eigenschaften des Ermüdungsvorganges. Hinsichtlich anderer Eigenschaften erweist es sich aber als vorteilhafter, die Sache mehr von einem physikalischen bzw. atomaren Standpunkt zu betrachten. Beide Gedankengänge sind zum Verständnis der Sache von Bedeutung und man soll sich darüber klar sein, daß die phänomenologische Zusammenfassung der mikroskopischen Vorgänge genau so wichtig für die Erklärung der physikalischen Beobachtungen ist wie die (im letzten Abschnitt der vorliegenden Arbeit gegebene) atomare Beschreibung der Einzelprozesse. Man braucht sich nur an das Beispiel der Gasdynamik zu erinnern, um die Wichtigkeit der statistischen Beschreibung des kollektiven Verhaltens zu erkennen.

## II. Ausgangshypothesen

Es ist eine Grundbeobachtung der technischen Physik, daß Stoffe unter der Einwirkung von äußeren zeitperiodischen Kräften zu Bruch gehen, obwohl die Belastungen weit unter der statischen Festigkeit liegen. Diese Erscheinung heißt Ermüdung<sup>1</sup> und die verminderte Festigkeit der Stoffe heißt Dauerfestigkeit.

Man betrachte die Vorgänge bei einem Prüfstück, das schon einen Dauerbruch durch  $N$  Zyklen unter der Belastungsspannung  $\sigma$  erlitten hat. Nun wird der Spannungsverlauf in der Umgebung des Bruchpunkts verfolgt. Zu diesem Zweck stelle man sich den Raum der Hauptspannungen vor. Jedem Spannungszustand entspricht genau ein Punkt dieses Raumes. Dabei werden folgende Annahmen gemacht:

1. Es existiert eine kritische Trennfläche (vgl. Fließgrenzfläche) in dem dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen, und diese teilt sämtliche Spannungszustände in zwei Punktmengen  $A$  und  $B$  auf folgende Art:

Ein Spannungszustand der Menge  $A$  (einschließlich des Nullspannungspunktes)

<sup>1</sup> A. Woehler: Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl. Zeitschrift für Bauwesen 8, 10, 13, 16, 20; 1860–1870.



entspricht nie der Entwicklung eines Hauptbruches. Ein Spannungszustand der Menge  $B$  entspricht immer der Entwicklung eines Hauptbruches im Prüfstück.

2. Die Entwicklung eines Hauptbruches aus einem Riß ist unabhängig von der hydrostatischen Spannung, d. h. der ersten Invariante der Hauptspannungen. Die Trennfläche ist also zylindrisch. Infolgedessen genügt es, Spannungszustände zu betrachten, die in einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse vorkommen. Der Durchschnitt der Ebene mit der Menge  $A$  heißt  $A'$ . Der Durchschnitt der Ebene mit der Menge  $B$  heißt  $B'$ .

3. Die Menge  $A'$  besteht aus allen Spannungspunkten innerhalb eines Kreises mit dem Radius  $\sigma_c$ , während die Menge  $B'$  aus allen übrigen Spannungspunkten der Ebene (einschließlich des Kreisrandes) besteht.

4. Am Anfang eines willkürlichen Zyklus der Wechselbeanspruchung ist der Spannungszustand im Bruchurpunkt gleich wahrscheinlich irgendeiner der Menge  $A'$ . Das bedeutet, daß der Spannungszustand in der Bruchurpunktumgebung völlig unbekannt ist, obwohl die äußere Wechsellast bekannt ist. Die mittlere Belastungsspannung ist gleich Null vorausgesetzt. Die Ursache dieser Spannungsverzerrung ist die angenommene völlige Unordnung der Gefüge. Vor dem Bruchanfang kann der Spannungszustand irgendeiner innerhalb des kritischen Kreises sein. Wie vorher erwähnt, sind hier handelsübliche Stoffe im Gegensatz zu perfekten Kristallen betrachtet.

5. Im Spannungsraum ist die einzige Wirkung eines Belastungszyklus eine Translation des Spannungszustandes um den festen (skalaren) Betrag  $\sigma$ . Dies geschieht gleich wahrscheinlich in irgendeiner Richtung.

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wird die Wirkung von Änderungen in den obenangeführten Annahmen untersucht. Es ist klar, daß diese nur eine Vereinfachung der Tatsachen darstellen und nur als Ausgangshypothesen dienen sollen.

Es sei noch erwähnt, daß  $\sigma$  als skalare Kenngröße des Wechselbeanspruchungstensors betrachtet wird. Eine Verknüpfung mit  $\vec{\sigma}$  als Projektion der Spannungszustandsänderung auf der Ebene  $A' + B'$  genügt, um die Definition von  $\sigma$  festzulegen.

### III. Theoretische Ableitung einer Woehler-Kurve

Nach den Annahmen des letzten Abschnittes ist der Spannungszustand in der Bruchurpunktumgebung am Anfang irgendeines Zyklus durch einen beliebigen Punkt innerhalb des Spannungskreises von Radius  $\sigma_c$  vertreten. Der Belastungszyklus verursacht eine Verschiebung des Spannungszustandspunktes nach einer neuen Lage, die entweder innerhalb oder außerhalb (einschließlich des Randes) des Spannungskreises liegen kann. Falls der neue Spannungszustandspunkt innen liegt, kann noch ein Belastungszyklus angebracht werden und der Vorgang wiederholt sich. Wenn aber der Belastungszyklus den Spannungszustandspunkt aus dem kritischen Kreis hinaus verschiebt, wird ein Hauptbruch eintreten und das Prüfstück wird versagen. Darum wird die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ermüdungsbruches mit der Entkommungswahrscheinlichkeit des Spannungszustandspunktes aus dem kritischen Spannungskreise identifiziert.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Umlage des Spannungszustandspunktes in den Kreisring mit den Radien  $s$  und  $s + ds$  um den Spannungsnullpunkt fällt, ist nach Czuber<sup>2</sup>

$$dp_1 = \frac{2\pi s ds}{\pi \sigma_c^2} = \frac{2s ds}{\sigma_c^2} \quad (\text{III. 1})$$

<sup>2</sup> E. Czuber: Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwertbildung, S. 108. Leipzig: 1884.



Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Belastungszyklus eine Spannungsänderung in der Richtung zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  verursacht, ist

$$dp_2 = \frac{d\vartheta}{2\pi}. \quad (\text{III. 2})$$

$\vartheta$  wird dabei als Winkel zwischen dem Radialvektor des Spannungszustandsurpunktes und dem Spannungsänderungsvektor  $\vec{\sigma}$  ( $\sigma = |\vec{\sigma}|$ ) betrachtet. Die (zusammengesetzte) Entkommungswahrscheinlichkeit  $p$  ist also

$$p = \int \int dp_1 dp_2 = \int_{\sigma_c - \sigma}^{\sigma_c} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{2\pi} \frac{2s ds}{\sigma_c^2} \quad (\text{III. 3})$$

$$p = \frac{2}{\pi \sigma_c^2} \int_{\sigma_c - \sigma}^{\sigma_c} \alpha s ds$$

wo  $\alpha$  durch  $\sigma_c^2 = s^2 + \sigma^2 + 2s\sigma \cos \alpha$  bestimmt ist. Das Integral läßt sich mittels elementarer Funktionen ausrechnen. Das Ergebnis ist

$$p = \frac{2}{\pi} \{ \arcsin \lambda + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \}$$

$$0 \leq \lambda = \frac{\sigma}{2\sigma_c} \leq 1. \quad (\text{III. 4})$$

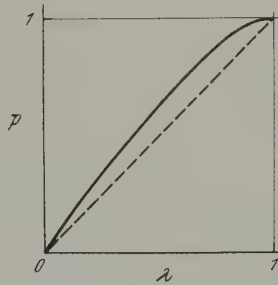


Abb. 1. Entkommungswahrscheinlichkeit gegen Spannungsverhältnis

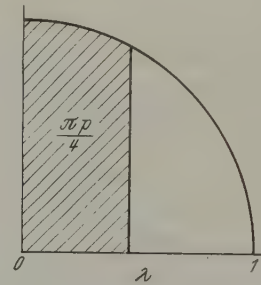


Abb. 2. Geometrische Deutung der Wahrscheinlichkeit

Diese Wahrscheinlichkeit  $p$  läßt sich geometrisch als Flächeninhalt jenes Teiles des Einheitskreises darstellen, der zwischen zwei parallelen Sekanten liegt, die eine Entfernung  $\lambda$  vom Mittelpunkt haben. Es ist klar, daß die Entkommungswahrscheinlichkeit gleich Eins wird für  $\sigma \geq 2\sigma_c$ .

Abb. 1 zeigt die Dauerbruchwahrscheinlichkeit als Funktion des Spannungsverhältnisses gemäß Gl. (III. 4). Zum Vergleich ist auch die Linie  $p = \lambda$  eingetragen. Abb. 2 zeigt die oben erwähnte geometrische Deutung.

Die erwartete Lastspielzahl  $N$  bis zum Bruch kann abgeschätzt werden aus der Beziehung\*

$$N p \approx 1. \quad (\text{III. 5})$$

\* Es ist zu beachten, daß die Beziehung (III. 5) eigentlich keine Gleichung ist und sogar nur eine Bedeutung im Sinn der Bernoullischen Ungleichung<sup>3</sup> hat. Genauer ausgedrückt lautet (III. 5)

$$P \left[ \left| p - \frac{1}{N} \right| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}, \quad (\text{III. 5})$$

wo  $P$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß  $\left| p - \frac{1}{N} \right|$  größer als  $\varepsilon$  ist. Nur in diesem Sinn und für genügend große  $N$  kann (III. 5) schlechthin als Gleichung behandelt werden. Mit dieser Vereinbarung wird jetzt das Zeichen  $\approx$  als Gleichheit geschrieben.

<sup>3</sup> H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics, p. 196, 197. Princeton: 1946.

Wäre  $p = \lambda$ , dann würde sich gemäß (III. 5) eine rechtwinklige Hyperbel ergeben. Diese ist in Abb. 3 dargestellt. Tatsächlich ist  $p > \lambda$  für  $0 < \lambda < 1$ , so daß die Kurve

$$N = \frac{1}{p} = \frac{\pi}{2 [\arcsin \lambda + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}]}, \quad (\text{III. 6})$$

etwa wie in Abb. 3 gezeichnet, unter die Hyperbel fällt.

Wenn man die Beziehung (III. 6) in der üblichen Form mit der Lastspielzahl als Abszisse und dem Spannungsverhältnis als Ordinate zeichnet, so bekommt man eine Woehler-Kurve, Abb. 4.

Ganz unabhängig von der besonderen Form der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p(\lambda)$  kann die Beziehung zwischen  $p(\lambda)$  und der Woehler-Funktion  $\lambda(N)$  mittels (III. 5) berechnet werden. Man hat auch



Abb. 3. Lastspielzahl gegen Spannungsverhältnis

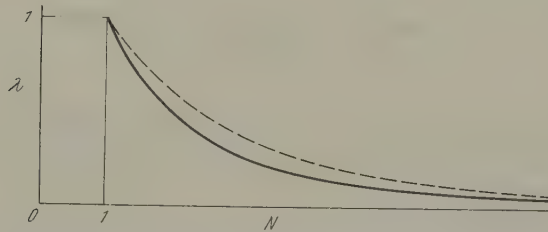


Abb. 4. Spannungsverhältnis gegen Lastspielzahl

$$\frac{d\lambda}{dn} = \frac{1}{\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{p} \right)}; \quad \frac{d^2\lambda}{dN^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{\left[ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{p} \right) \right]^2} \right] \quad (\text{III. 7})$$

oder mit  $n = \ln N$

$$\frac{d\lambda}{dN} = - \frac{1}{\frac{d}{d\lambda} (\ln p)}; \quad \frac{d^2\lambda}{dN^2} = - \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{\left[ \frac{d}{d\lambda} (\ln p) \right]^2} \right]. \quad (\text{III. 8})$$

Diese Ausdrücke bestimmen die Neigung und die Krümmung der Woehler-Kurve in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Die Beziehung (III. 5) zeigt, daß eine Woehler-Kurve der Form  $\lambda N = 1$  nur dann zu erwarten ist, wenn  $p = \lambda$  ist.

#### IV. Der Einfluß der mittleren Belastungsspannung auf die Dauerfestigkeit

Bis jetzt war angenommen, daß der Spannungszustand im Bruchpunkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein beliebiger Punkt im kritischen Spannungskreis sein kann. Um nun die eventuelle Wirkung einer mittleren Belastungsspannung zu erfassen, wird diese Annahme durch die folgende ersetzt:

4'. Am Anfang eines willkürlichen Zyklus der Wechselbeanspruchung ist der Spannungszustand im Bruchpunkt am wahrscheinlichsten ein besonderer Punkt der Menge  $A'$ . Dieser Punkt wird durch den Spannungsvektor  $\vec{\sigma}_m$  dargestellt.

Bei einer nicht allzu starken Gefügeunordnung ist also zu erwarten, daß mit steigender mittlerer Beanspruchung der Einfluß der äußeren Belastung trotz der Un-

ordnung zum Bruchpunkt vordringen wird. Es soll also eine mittlere Spannung  $\vec{\sigma}_m$  im Bruchpunkt herrschen oder, mit anderen Worten, die dortige Spannung kann nicht gleich wahrscheinlich jeden unterkritischen Wert annehmen, sondern der Wert  $\vec{\sigma}_m$  wird bevorzugt (Abb. 5).

Es ist nun leicht ersichtlich, wie die Ableitungen des vorigen Abschnittes verallgemeinert werden müssen, wenn (4) durch (4') ersetzt wird. Der mittlere Spannungsvektor  $\vec{\sigma}_m$  vom Nullspannungspunkt aus reicht bis zum Punkt mit Polarkoordinaten  $\sigma_m, \varphi_m$  auf dem kritischen Spannungskreis. Nun führt man eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $\psi(s, \varphi; \sigma_m, \varphi_m)$  ein, die die Ungleichheit der Zustandswahrscheinlichkeiten berücksichtigen soll. Statt (III. 1) hat man jetzt:

$$dp_1 = \psi(s, \varphi; \sigma_m, \varphi_m) s ds d\varphi \quad (\text{IV. 1})$$

mit der Normierung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sigma_c} \psi(s, \varphi; \sigma_m, \varphi_m) s ds d\varphi = 1.$$

Dagegen bleibt (III. 2) wie vorher

$$dp_2 = \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

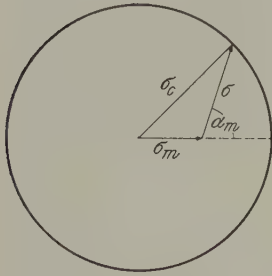


Abb. 5. Der Einfluß der Mittelspannung

Die zusammengesetzte Entkommungswahrscheinlichkeit wird dann

$$p = \int \int dp, dp_2, \quad (\text{IV. 2})$$

so daß

$$p = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_c - \sigma}^{\sigma_c} \int_0^{2\pi} \alpha \psi(s, \varphi; \sigma_m, \varphi_m) s ds d\varphi,$$

wo  $\alpha$  wieder durch  $\sigma_c^2 = s^2 + \sigma^2 + 2 s \sigma \cos \alpha$  gegeben ist.

Die Entkommungswahrscheinlichkeit hängt von der besonderen Wahl der Dichtefunktion  $\psi$  ab. Trotzdem ist die allgemeine Wirkung eines scharf ausgeprägten einzelnen Maximums nicht schwer abzuleiten. Für den Extremfall, daß  $\psi$  etwa eine Diracsche  $\delta$ -Funktion ist, hat man

$$\psi = \frac{\delta(s - \sigma_m) \delta(\varphi - \varphi_m)}{s}. \quad (\text{IV. 3})$$

Wenn  $\alpha_m$  jetzt durch  $\sigma_c^2 = \sigma_m^2 + \sigma^2 + 2 \sigma_m \sigma \cos \alpha_m$  definiert ist, erhält man für die Entkommungswahrscheinlichkeit  $p$

$$p = \begin{cases} \frac{\alpha_m}{\pi} & \sigma_m + \sigma > \sigma_c \\ 0 & \sigma_m + \sigma < \sigma_c \end{cases}. \quad (\text{IV. 4})$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß kein Dauerbruch eintreten wird, solange die Summe aus mittlerer Belastungsspannung und Wechsellastspannung nicht die kritische Spannung überschreitet. Es steht in unmittelbarer Beziehung zur sogenannten Goodman-Regel<sup>4</sup>, die oftmals im Maschinenbau Verwendung findet. Abb. 6 zeigt eine Goodman-Zeichnung.

Übrigens läßt sich (IV. 4) auch aus einer elementaren geometrischen Überlegung

<sup>4</sup> J. Goodman: Mechanics Applied to Engineering 1, Ninth Ed., 634, Longmans, Green & Co. (1930).



ohne Anwendung der Diracschen  $\delta$ -Funktion herleiten. Man lasse den Anfangszustand mit voller Sicherheit (Wahrscheinlichkeit gleich Eins) dem Spannungspunkt  $(\sigma_m, \varphi_m)$  entsprechen. Dann wird leicht ersichtlich, daß die Entkommungswahrscheinlichkeit das Verhältnis zwischen den günstigen Fällen und der Gesamtmöglichkeitsanzahl  $\frac{\alpha_m}{\pi}$

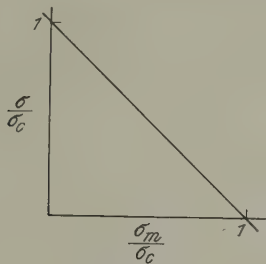


Abb. 6. Beziehung zwischen Mittelspannung und Wechsellastspannung

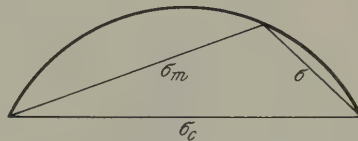


Abb. 7. Geometrische Deutung der Beziehung

ist. Es stellt sich dann heraus, daß für vorgegebene  $\sigma_c$  die Dauerbruchwahrscheinlichkeit  $p$  unveränderlich ist, solange  $\sigma$  und  $\sigma_m$  Seiten eines Dreiecks (Abb. 7) sind, dessen Scheitel auf einem Kreisbogen läuft.

## V. Verallgemeinerungen

Das oben angegebene Ermüdungsmodell kann auf verschiedene Weise verändert und verallgemeinert werden.

Bis jetzt trat bei der abgeleiteten Woehler-Kurve nur die Asymptotenlinie  $\sigma = 0$  auf. Es ist jedoch leicht ersichtlich, daß ein Ersatz von  $\sigma$  durch  $(\sigma - \sigma_b)$  genügt, um eine Asymptotenlinie  $\sigma = \sigma_b$  zu erzeugen (Abb. 8).

Formal ausgedrückt müßte man Annahme (5) durch die folgende Annahme (5') ersetzen.

5'. Im Spannungsraum besteht die einzige Wirkung eines Belastungszyklus in einer Translation des Spannungszustandes um den festen Betrag  $\sigma - \sigma_b$ . Dies geschieht gleich wahrscheinlich in irgendeiner Richtung.

Die Spannung  $\sigma_b$  heißt Ermüdungsgrenze und ist zugleich die größte Wechsellastspannung, die nicht das Versagen eines unendlich oft belasteten Prüfstückes hervorruft. Streng genommen hat dieser Begriff keine physikalische Bedeutung, weil unendlich viele Belastungszyklen physikalisch nicht erreichbar sind. Jedoch wurde in Ermüdungsversuchen öfter beobachtet, daß die Woehler-Kurve sogar nach  $10^8$  Belastungszyklen immer noch waagrecht zu verlaufen scheint, obwohl die Wechsellastspannung nur etwa ein Drittel der statischen Festigkeit beträgt. In diesem Sinn wird der Ausdruck „Ermüdungsgrenze“ hier angewandt.

Eine physikalische Berechtigung zur Einführung von  $\sigma_b$  würde man auf folgender Basis suchen. Man stelle sich vor, daß es einen irreversiblen Energieverlust während jedes Belastungszyklus gibt. Nun wird ein gewisser Minimalbetrag der aufgebrachten Energie verlorengehen und nur die übrige Energie kann zur Spannungszustands-

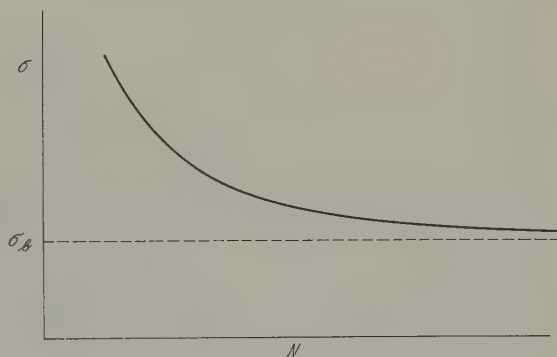


Abb. 8. Darstellung der Ermüdungsgrenze

änderung beitragen. Dieser Tatbestand kann schlechthin durch Abziehen von  $\sigma_b$  von  $\sigma$  berücksichtigt werden. Es wird vermutet, daß der Energieverlust zur Wiederorientierung der magnetischen Bereiche dient. Scheinbar wäre keine Gefügeänderung damit verbunden. Dies wird in Abschnitt VIII weiter verfolgt.

Gewisse andere Verallgemeinerungen können vorgeschlagen werden. Die Hypothesen über Lageunabhängigkeit des Spannungsurpunktes und über Richtungsunabhängigkeit der Spannungsänderung in den Annahmen (4) und (5) können durch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen verändert werden. Z. B. könnte man statt (III. 2)

$$dp_2 = g(\vartheta) d\vartheta; \quad \int_0^{2\alpha} g(\vartheta) d\vartheta = 1 \quad (\text{V. 1})$$

schreiben.

Die Annahme über das Vorhandensein einer scharf ausgeprägten kritischen Spannung  $\sigma_c$  könnte dadurch verändert werden, daß man zwei kritische Spannungen  $\sigma_c'$  und  $\sigma_c''$  definiert. Zwischen den zwei Spannungen soll es zu einer plastischen Verformung kommen und jenseits beider Spannungen soll ein Bruch eintreten.

Es braucht nicht betont zu werden, daß  $\sigma_c$  auch als temperaturunabhängig aufgefaßt werden könnte.

Schließlich sieht man, daß alle Annahmen und Folgerungen statt in den Spannungen mit gleicher Berechtigung in den Dehnungen ausgedrückt werden können.

## VI. Ermüdungsbeschädigung und Diffusionsgrenzfall

In den vorigen Abschnitten war der Ermüdungsvorgang als einfache Entkommungserscheinung im Spannungsraum aufgefaßt worden. Diese Erklärung erweist sich jedoch als unzureichend wegen des vollständigen Mangels an Aussagen über eine fortschreitende Beschädigung der Stoffe bei Dauerschwingungen. Um diese Unvollkommenheit zu überwinden und zugleich ein physikalisch annehmbares Gedankenbild der Ermüdungserscheinungen zu gewinnen, wird vom Begriff der einzelnen Zyklen als Bernoulli-Versuche abgewichen.

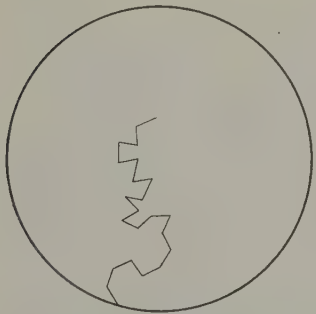


Abb. 9. Ermüdung als Irrfahrt

Will man den Begriff einer fortschreitenden Beschädigung erfassen, so muß man den Zusammenhang zwischen der gegenwärtigen Lage und den vergangenen Verschiebungen des Spannungszustandpunktes berücksichtigen. Dies ist unvermeidlich mit irgendeiner summierenden Beschädigung durch Dauerschwingbelastung verbunden.

Die Überlegung führt zur Vorstellung, daß der Spannungszustandpunkt im kritischen Spannungskreis eine Reihe von Schritten fester Größe  $\sigma$  in willkürlichen Richtungen macht. Der Punkt führt mit anderen Worten eine Irrfahrt<sup>5</sup> durch. Der Ermüdungsbruch soll dabei erst auftreten, bis der kritische Kreisrand erreicht wird (Abb. 9).

Die Frage, wie man den Beschädigungsbegriff quantitativ fassen kann, wäre durch eine zahlenmäßige Ausrechnung des irrfahrtlichen Fortschreitens des Spannungszustandpunktes gegen den Kreisrand gelöst. Es ist nun wohl bekannt, daß Irrfahrtsprobleme unter gewissen Voraussetzungen<sup>6</sup> über den Grenzwert des Schrittzeitverhältnisses in Diffusionsprobleme übergehen. Für den gegenwärtigen Zweck genügt es aber, auf die folgenden Annahmen hinzuweisen.

<sup>5</sup> W. Feller: Probability Theory and its Applications, Chapter 14. New York: 1950.

<sup>6</sup> F. John: Communications on Pure and Applied Mathematics V, No. 2, 155, May (1952).

6. Das Kontinuum möglicher unterkritischer Spannungszustände wird durch das quadratische Gitter von diskreten Spannungszustandspunkten ersetzt.

7. Das Gitterintervall (Schrittweite)  $\sigma$  zwischen Spannungszustandspunkten soll genügend klein gegenüber  $\sigma_c$  sein, so daß die untenstehende Differentialgleichung (VI. 1) des Irrfahrtsvorganges durch die entsprechende Diffusionsgleichung ersetzt werden kann.

8. Die Irrfahrt des Spannungszustandspunktes ist durch das Vorhandensein eines kritischen Spannungskreisrandes völlig unbeeinflußt. Diese Annahme kann höchstens als grobe Annäherung an die Grundtatsachen angesehen werden, weil sie rückkehrende Irrfahrtswege außerhalb des kritischen Kreises erlaubt.

Wenn  $p(n, x, y)$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß der  $n$ -te Schritt den Spannungszustandspunkt zum Gitterpunkt  $(x, y)$  bringt, so hat man

$$p(n+1, x, y) = q \{p(n, x+\sigma, y) + p(n, x-\sigma, y) + p(n, x, y+\sigma) + p(n, x, y-\sigma)\}, \quad (\text{VI. 1})$$

wo  $q$  die für jede Richtung gleiche Wahrscheinlichkeit eines Schrittes bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Zustandspunkt stehenbleibt, soll gleich Null sein. Somit wird  $q = \frac{1}{4}$ .

Die Differentialgleichung (VI. 1) kann auch in der Form

$$\begin{aligned} p(n+1, x, y) - p(n, x, y) = \\ = \frac{1}{4} \{ [p(n, x+\sigma, y) + p(n, x-\sigma, y) - 2p(n, x, y)] + \\ + [p(n, x, y+\sigma) + p(n, x, y-\sigma) - 2p(n, x, y)] \} \end{aligned} \quad (\text{VI. 2})$$

geschrieben werden.

Mit der vorher angegebenen Annahme hat man

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &\sim p(n, x+\sigma, y) + p(n, x-\sigma, y) - 2p(n, x, y) \\ \sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &\sim p(n, x, y+\sigma) + p(n, x, y-\sigma) - 2p(n, x, y) \\ \frac{\partial p}{\partial n} &\sim p(n+1, x, y) - p(n, x, y) \end{aligned} \quad (\text{VI. 3})$$

Im Grenzfall hat man die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\sigma^2}{4} \Delta p. \quad (\text{VI. 4})$$

Eine um den Nullspannungspunkt symmetrische Lösung dieser Gleichung in der unendlichen Ebene ist

$$p(n, s) = \frac{1}{\pi \sigma^2 n} e^{-\frac{s^2}{\sigma^2 n}}. \quad (\text{VI. 5})$$

Diese Lösung ist bereits normiert, d. h.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty p(n, s) s ds d\vartheta = 1. \quad (\text{VI. 6})$$

Daraus ergibt sich als Erwartungswert von  $s$

$$E(s) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty s p(n, s) s ds d\vartheta = \frac{\sigma \sqrt{\pi n}}{2}. \quad (\text{VI. 7})$$

Der Erwartungswert von  $s^2$  läßt sich gleichfalls leicht ausrechnen. Man erhält

$$E(s^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty s^2 p(n, s) s ds d\vartheta = \sigma^2 n. \quad (\text{VI. 8})$$



Dies ist nichts anderes als das wohlbekannte Ergebnis der Irrfahrtstheorie: Der Fortschritt bei einer unbegrenzten Gaußschen Irrfahrt ist dem Produkt aus Schrittlänge und Quadratwurzel der Schritttanzahl gleich. Daraus kann man mit der hier vertretenen Irrfahrtstheorie der Ermüdung einen anschaulichen Einblick in die Frage der unvollständigen Beschädigung bei Ermüdungsversuchen mit zeitveränderlichen Belastungsamplituden gewinnen und so eine Basis für vernünftige Definitionen der Beschädigungsmaße vorschlagen.

Der Hauptzweck eines Beschädigungsmaßes ist die Beantwortung der Frage, wie viele Belastungszyklen ein Prüfstück noch aushalten wird, nachdem es eine gegebene Anzahl von Belastungszyklen unter verschiedenen gegebenen Wechsellspannungen schon durchlaufen hat. Gewöhnliche Dauerfestigkeitsversuche werden bis zum Bruch mit konstanten Wechsellspannungen durchgeführt, aber hier geht es um eine Reihe von unvollständigen Versuchen (das Prüfstück ist noch nicht gebrochen) bei verschiedenen Spannungen  $\sigma_k$  für verschiedene Anzahlen  $n_k$  von Belastungszyklen. Als bekannt vorausgesetzt sind die erforderlichen Lastspielzahlen  $N_k$ , die unter Wechsellspannungen  $\sigma_k$  zum Bruche führen. Gefragt wird dann, wie viele Belastungszyklen unter gegebenen Spannungen noch ertragen werden können.

Verwendet man jetzt das oben angegebene Fortschrittsergebnis als Annäherung, so ergibt sich als Gesamtfortschritt gegen den kritischen Kreisrand

$$\sum_k \sigma_k \sqrt{n_k}. \quad (\text{VI. 9})$$

Damit das Prüfstück unter diesen verschiedenen Belastungen versagt, sollte der Gesamtfortschritt gleich der kritischen Spannung  $\sigma_c$  sein. Also

$$\sum \sigma_k \sqrt{n_k} = \sigma_c. \quad (\text{VI. 10})$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit  $p_k$  eines Bruches unter Wechsellspannung  $\sigma_k$  eine Funktion des Verhältnisses  $\frac{\sigma_k}{\sigma_c}$ ; nimmt man zwecks Vereinfachung an, daß

$$p_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_c} \quad (\text{VI. 11})$$

ist, so hat man wegen  $N_k p_k \approx 1$

$$\sum_k \frac{\sqrt{n_k}}{N_k} = 1 \quad (\text{VI. 12})$$

als Bruchkriterium. Ein eventueller Proportionalitätsfaktor ändert nur das numerische Ergebnis, aber nicht die Gestalt der Beziehung.

In der Luftfahrttechnik wird häufig (ohne theoretische Begründung) als Bruchkriterium<sup>7</sup> das sogenannte Miner-Palmgren-Kriterium benützt, welches lautet:

$$\sum_k \frac{n_k}{N_k} = 1. \quad (\text{VI. 13})$$

Man erkennt sofort, daß dieses Ergebnis der Annahme eines konsequenten, nicht irrfahrtlichen Fortschreitens

$$\sum_k \sigma_k n_k \quad (\text{VI. 14})$$

entspricht. Demgemäß sollte dieses Kriterium konservativer (also auch stoffverschwendender) als das erste sein, weil es ein schnelleres Versagen behauptet.

In der Praxis könnte man eine realistischere Beziehung für die Bruchwahrscheinlichkeit aus Versuchsdaten gewinnen. Im allgemeinen müßte man

<sup>7</sup> M. A. Miner: Cumulative Damage in Fatigue. J. Appl. Mech. **12**, 159–164 (1945).

$$p_k = f\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_c}\right) \text{ oder } \frac{\sigma_k}{\sigma_c} = g(p_k) \quad (\text{VI. 15})$$

setzen. Dann hätte man mit  $N_k p_k \approx 1$

$$\sum_k \sqrt{n_k} g\left(\frac{1}{N_k}\right) = 1 \quad (\text{VI. 16})$$

als Bruchkriterium und

$$\sum_k \sqrt{n_k} g\left(\frac{1}{N_k}\right) \text{ (nicht bis zum Bruch addiert!)} \quad (\text{VI. 17})$$

als Beschädigungsmaß.

## VII. Eine analytische Lösung des Ermüdungsproblems

Gewisse Einwände gegen das Ersetzen von Irrfahrtsproblemen durch Diffusionsprobleme können erhoben werden. Vor allem artet eine Irrfahrt nur dann in einen Diffusionsvorgang aus, wenn die Schrittlänge hinreichend klein gegenüber dem Gebietsdurchmesser ist.

Es wird jetzt eine Lösung gesucht, die sich überhaupt nicht an eine diffusionsartige Auffassung des Ermüdungsvorganges anlehnt. Als Ausgangspunkt nehmen wir eine allgemeine Lösung der Irrfahrtsaufgabe in der unendlichen Ebene. Diese stammt von J. C. Kluyver<sup>8</sup> und wird in dem bekannten Werk von G. N. Watson<sup>9</sup> über Besselsche Funktionen besprochen. Die dort angegebene Lösung läßt sich wie folgt schreiben:

$$P(n, s) = s \int_0^\infty J_1(st) \left[ J_0(\sigma t) \right]^n dt, \quad (\text{VII. 1})$$

wo  $P(n, s)$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß der  $n$ -te Zyklus den Spannungszustandspunkt in eine radiale Spannungsentfernung nicht größer als  $s$  verlegt. Diese Lösung wurde durch Einsetzen des unstetigen Integrals

$$s \int_0^\infty J_1(st) J_0(s_n t) dt = \begin{cases} 1 & |s_n < s \\ 0 & |s_n > s \end{cases} \quad (\text{VII. 2})$$

aus dem vielfachen Integral

$$P(n, s) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta_{n-1} d\vartheta_{n-2} \dots d\vartheta_1 \quad (\text{VII. 3})$$

erhalten. Hierbei ist  $s_n$  der Betrag der Vektorsumme aller Verschiebungen und  $\vartheta_n$  sind die Winkel zwischen den aufeinanderfolgenden Verschiebungen.

Um Irrwege außerhalb des kritischen Kreises auszuschließen, braucht man nur ein ähnliches unstetiges Integral für jede Verschiebung des Spannungszustandspunktes einzuführen.

Der Anfangsspannungszustand ist durch einen Punkt im kritischen Kreis mit radialer Entfernung  $x$  vertreten. Man ordnet jedem anderen Punkt das Verhältnis  $\varrho$  zwischen seiner Entfernung vom Anfangsspannungspunkt und seiner Entfernung vom Spiegelbild (im kritischen Kreis) des Anfangsspannungspunktes zu. Jeder Punkt innerhalb des kritischen Kreises hat dann die Eigenschaft  $\varrho < \frac{x}{\sigma_c}$ , während jeder Punkt außerhalb des kritischen Kreises der Beziehung  $\varrho > \frac{x}{\sigma_c}$  genügt. Infolgedessen verschwindet

<sup>8</sup> J. C. Kluyver: Proc. K. Akad. van Wet. te Amsterdam VIII, 341—350 (1960).

<sup>9</sup> G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Second Edition, p. 426. New York: 1945.

$$\left(\frac{x}{\sigma_c}\right) \int_0^{\infty} J_1\left(\frac{x t}{\sigma_c}\right) J_0(\varrho t) dt = \begin{cases} 1 & \varrho < \frac{x}{\sigma_c} \\ 0 & \varrho > \frac{x}{\sigma_c} \end{cases} \quad \text{VII. 4.}$$

für alle Punkte außerhalb des Spannungskreises. Führt man jetzt eine ähnliche Größe  $\varrho_m$ , die  $s_m$  entspricht, ein, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit  $P$ , daß die Gesamtspannungsänderung (radialer Betrag) nach  $n$  Zyklen der Belastung bei einer Wechselbeanspruchung  $\sigma$  nicht größer ist als  $s$ , der Wert  $P(n, s, x, \sigma_c, \sigma) =$

$$s \left(\frac{x}{2\pi\sigma_c}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n J_1\left[\frac{x t_k}{\sigma_c}\right] J_0(\varrho_k t_k) J_0(s_n t) J_1(s t) dt \prod_{k=1}^n dt_k d\vartheta_k. \quad \text{(VII. 5)}$$

Die  $\sigma$ -Abhängigkeit geht durch  $s_n$  und  $\varrho_k$  ein. Hierin soll  $s_n$  die  $n$ -te Vektorsumme von  $x$  aus sein. Nennt man jetzt die Entkommungswahrscheinlichkeit aus dem kritischen Kreis  $\mathfrak{P}(n, x, \sigma_c, \sigma)$ , so sieht man sogleich, daß

$$\mathfrak{P}(n, x, \sigma_c, \sigma) \leq 1 - P(n, \sigma_c - x, x, \sigma_c, \sigma). \quad \text{(VII. 6)}$$

Somit kann die Funktion

$$\tilde{P} = 1 - P(n, \sigma_c - x, x, \sigma_c, \sigma) \quad \text{(VII. 7)}$$

als Majorantemaß der Ermüdungsbeschädigung angesehen werden.

Die gleiche Methode mit denselben unstetigen Integralen kann auch auf den Fall veränderlicher Belastungsamplituden angewandt werden.

### VIII. Die physikalische Grundlage der Ermüdung

Die Elektronentheorie der Metalle ergibt statische Festigkeiten von der Größenordnung einiger hunderttausend Atmosphären<sup>10</sup>. Im Gegensatz dazu liefern Versuche mit handelsüblichen Prüfstücken Ergebnisse, die eine oder mehrere Größenordnungen darunter liegen. Die Verschiedenheit wird allgemein durch das Vorhandensein von Fehlstellen erklärt<sup>11</sup>. Diese werden als nulldimensional, eindimensional oder zweidimensional bezeichnet, je nachdem sie atomare Abweichungen von einer idealen Kristallstruktur in drei, zwei oder einer Raumdimension aufweisen. Als Beispiele kann man Punktfehler, Versetzungen und Korngrenzen erwähnen. Die ersten zwei Arten von Fehlstellen sind in vielen, Korngrenzen dagegen in weniger Veröffentlichungen theoretisch behandelt.

Die theoretische Berechnung der statischen Festigkeit hat ihre experimentelle Bestätigung durch Versuche mit sorgfältig erzeugten Einkristallen gefunden. Bei solchen fast fehlerfreien Einkristallen sind die theoretischen Festigkeiten tatsächlich erreicht worden<sup>12</sup>.

Unabhängig von der Frage, in welchem Maß die verschiedenen Arten von Fehlstellen zur statischen Festigkeitsverminderung beitragen, zeigt die Beobachtung, daß die statische Festigkeit handelsüblicher Metalle und Legierungen ein Volumeneffekt ist. Im Gegensatz dazu stellt sich der Ermüdungsbruch als eine Oberflächeneigenschaft dar. Man ist zu diesem Schluß durch neuere Versuchsergebnisse gelangt. Es wurde beobachtet, daß man mit geeigneten Elektropolierverfahren<sup>13</sup> Ermüdungsbrüche anscheinend beliebig lange durch wiederholtes Polieren hinauszögern kann<sup>14</sup>.

<sup>10</sup> F. Seitz: Modern Theory of Solids. New York: 1940.

<sup>11</sup> A. Seeger: Theorie der Gitterfehlstellen. Handbuch der Physik, Bd. VII, Teil 1. Berlin: 1955.

<sup>12</sup> C. Herring and J. K. Galt: Phys. Rev. **85**, 1060 (1952).

<sup>13</sup> P. A. Jacquet: Electrolytic and Chemical Polishing. Metallurgical Reviews **1**, Pt. 2, 157 (1956).

<sup>14</sup> N. Thompson: Experiments Relating to the Origin of Fatigue Cracks. International Conference on Fatigue in Flight Structures in New York. 1956.



Legt man dem Ermüdungsbruch das Vorhandensein einer Verdichtung von Fehlstellen auf der Oberfläche zugrunde und fordert man die Existenz einer eindeutigen Beziehung zwischen statischer Festigkeit und Dauerfestigkeit, so kommt man zu dem Schluß, daß eine Fehlstellenwanderung gegen die Oberfläche hin stattfindet. Diese Wanderung und Oberflächenanhäufung ist dadurch erklärt, daß sie eine Verminderung der Verzerrungsenergie veranlaßt. Schon aus der einfachen Überlegung, daß ein mehrfach zusammenhängender isotroper Körper unter äußerer hydrostatischer Belastung i. a. eine positive Verzerrungsenergie aufweist, erwartet man, daß das Auswandern von Fehlstellen mit einer Verminderung der Verzerrungsenergie verbunden ist. In der Tat stimmt dieses Ergebnis überein mit zahlreichen Berechnungen der Versetzungsenergie, die sich als monoton wachsende Funktion der Entfernung zwischen Versetzung und Oberfläche ergibt. Beispiele sind in der Literatur<sup>11</sup> enthalten. Dort ist die Versetzungsenergie eine logarithmische Funktion bzw. die scheinbare Anziehungskraft der Oberfläche umgekehrt proportional dem Abstand zwischen Oberfläche und Versetzung.

Es wurde schon früher (Abschnitt V) angedeutet, wie man den Begriff „Ermüdungsgrenze“ in die Irrfahrtsauffassung des Ermüdungsvorganges einführen könnte. Nun wird eine physikalische Basis für das Vorhandensein einer solchen Ermüdungsgrenze etwas näher untersucht.

Die Elektropoliersversuche zeigen, daß in einer Dauerfestigkeitsprüfung Ermüdungsbruch durch Fehlstellenanhäufung auf der Oberfläche verursacht wird. Irgendwelche Natureinflüsse, die diese Anhäufung verhindern, werden auch eine Verlängerung der Lebensdauer zur Folge haben. Umgekehrt werden anhäufungsbeschleunigende Einflüsse zu einer Lebensverkürzung führen.

Es kann sein, daß die anhäufungsverhindernden Einflüsse genügend stark sind, um die Anhäufung sehr lange zu verzögern. In diesem Fall wird die Lebensdauer sehr groß, also praktisch „unendlich“ sein. Dann kann man von einer Ermüdungsgrenze reden. Was für ein Mechanismus soll dieser Anhäufungsverhinderung zugrunde liegen?

Vorausgesetzt sei ein ferromagnetischer Stoff. Bekanntlich sind solche Stoffe in kleine Bereiche von eindeutiger Magnetisierung unterteilt<sup>15</sup>. Diese ferromagnetischen Bereiche sind voneinander durch sogenannte Blochsche Wände, d. h. Schichten, wo die einzelnen magnetischen Momente allmählich die Richtungsunterschiede zwischen benachbarten Bereichen ausgleichen, getrennt. Man stelle sich nun eine Leerstelle innerhalb eines Bereiches vor. Geht diese Leerstelle auf einen benachbarten Bereich über, so muß ihre ehemalige Lage mit Teilchen vom benachbarten Bereich gefüllt werden. Wegen des Unterschiedes in der Magnetisierungsrichtung für die zwei Bereiche muß Arbeit für den Richtungsausgleich geleistet werden. Diese Energieausgabe kann durch den bekannten Energiebetrag der Blochschen Wand abgeschätzt und in Form einer Spannung ausgedrückt werden.

Für Eisen mit einer Blochschen Wand von etwa 300 Gitterkonstantenlängen hat man eine Wandenergie von rund 2 erg/cm<sup>16</sup>. Also wird der Wandübergangsaufwand vergleichbar mit einer Spannung  $\sigma$  gemäß

$$\frac{\sigma^2 b}{2E} \approx 2 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$$

mit  $b = 3 \times 10^{-6}$  cm als Wandstärke und  $E = 2 \times 10^{12} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$  als Elastizitätsmodul.

Man errechnet

$$\sigma \approx 2 \sqrt{\frac{E}{b}} \sim 2 \times 10^9 \sqrt{\frac{3}{2}} \sim 2,5 \times 10^9 \text{ dyn/cm}^2$$

oder  $\sigma \sim 2500 \text{ kp/cm}^2$ .

<sup>15</sup> K. H. Stewart: Ferromagnetic Domains. Cambridge: 1954.

<sup>16</sup> C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, p. 186. New York: 1953.

Dieses Ergebnis stimmt mit der beobachteten Größenordnung überein. Man sieht, daß für diesen Spezialfall der Ferromagnetismus eine mögliche Erklärung für das Vorhandensein einer Ermüdungsgrenze liefert. Ob er als allgemeine Erklärung dienen könnte, müßte in einem sorgfältigen Versuchsprogramm studiert werden. Eine Zurückführung der Ermüdungsgrenze auf Ferromagnetismus würde auch das Verschwinden der Ermüdungsgrenze oberhalb der Curie-Temperatur ( $1000^\circ \text{K}$ ) verlangen. Diesbezüglich gibt es manchen wenn auch unvollständigen experimentellen Nachweis. Hier dürfte ein wertvolles Gebiet für künftige Untersuchungen liegen.

(Eingegangen am 30. Mai 1960)

## Die Bahnkurven eines merkwürdigen Zwölfstabgetriebes

Von O. Bottema, Delft

Mit 4 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Für die beiden zwangsläufigen Formen des Wunderlichschen Zwölfstabgetriebes werden die Bahnkurven der Knoten studiert. Hierbei ergibt sich, daß der Gelenkmechanismus aus zwei Parallelogrammen und vier Antiparallelogrammen zu einem Sechzehnstabgetriebe ausgestaltet werden kann.

### I.

W. Wunderlich hat unlängst die Existenz eines ebenen Gelenkmechanismus nachgewiesen, der merkwürdigerweise in verschiedenen Stellungen verschiedene Freiheitsgrade aufweist<sup>1</sup>. Er ging dabei aus von dem in Abb. 1 wiedergegebenen

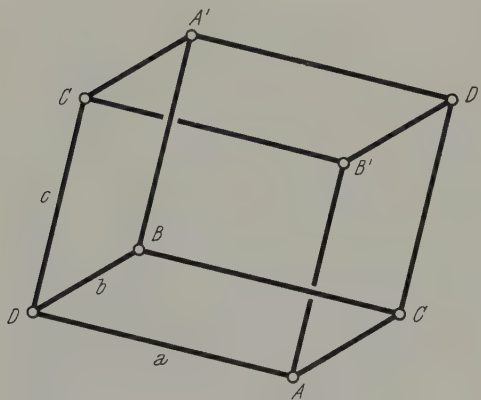


Abb. 1. Grundform des Zwölfstabgetriebes

Getriebe, das zwölf Stäbe enthält, von welchen je vier parallel und gleich lang sind:  $DA = BC' = CB' = A'D' = a$ ,  $DB = CA' = AC' = B'D' = b$ ,  $DC = AB' = BA' = C'D' = c$ . In jedem der acht Gelenknoten kommen drei Stäbe ungleicher Länge zusammen. Die Konfiguration könnte als die Parallelprojektion eines Würfels aufgefaßt werden. Das Getriebe hat, wenn einer der Stäbe festgehalten wird, offensichtlich zwei Freiheitsgrade.

Das System besitzt gewisse Verzweigungslagen, in welchen sämtliche Stäbe in eine Gerade fallen. Wunderlich hat nun untersucht, ob aus einer solchen Lage Konfigurationen hervorgehen können, bei welchen von den sechs Parallelogrammen des Systems gewisse in Antiparallelogramme verwandelt erscheinen. Er zeigte, daß es Lagen mit zwei, drei, vier und sechs Antiparallelogrammen gibt und wies nach, daß diejenigen mit zwei und sechs Antiparallelogrammen immer noch zwei Freiheitsgrade, die übrigen aber überraschenderweise nur mehr einen Freiheitsgrad besitzen, also zwangsläufig geworden sind.

Wir wollen hier die beiden letztgenannten Mechanismen etwas näher untersuchen und die Bahnkurven bestimmen, die ihre Knotenpunkte durchlaufen, wenn man einen der Stäbe festhält.

<sup>1</sup> W. Wunderlich: Ein merkwürdiges Zwölfstabgetriebe. Österr. Ing.-Archiv 8, 224–228 (1954).

## II.

Der Mechanismus mit drei Antiparallelogrammen wird nach Wunderlich in folgender Weise erhalten: Man sucht eine solche Lage der Grundform auf, bei welcher die Punkte  $A, B, C$  und damit auch  $A', B', C'$  kollinear sind, also auf zwei parallele Geraden  $l$  und  $l'$  zu liegen kommen (Abb. 2, wo  $D''$  für  $D'$  steht); durch Spiegelung der drei von  $D''$  ausgehenden Stäbe an  $l'$  entsteht dann das fragliche Getriebe. Wird beispielsweise der Stab  $AD$  festgehalten, dann kann man nur noch die Richtung von  $l$  beliebig wählen; der Freiheitsgrad ist also gleich eins.

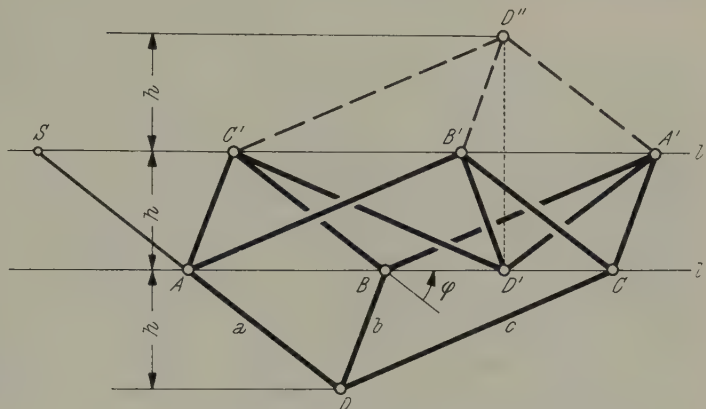


Abb. 2. Zwölfstabgetriebe mit drei Antiparallelogrammen

Die zwölf Stäbe, die in der Grundform gleichberechtigt waren, zerfallen jetzt in drei Gruppen: die drei von  $D$  ausgehenden Stäbe gehören nur Parallelogrammen an,

die drei von  $D'$  ausgehenden nur Antiparallelogrammen, die restlichen sechs gehören je einem Parallelogramm und einem Antiparallelogramm an.

Wird ein Stab festgehalten, dann bleiben zwei der acht Knotenpunkte in Ruhe, während vier andere je einen Kreis beschreiben; es handelt sich also jeweils nur noch darum, die Bahnen der beiden restlichen Knoten zu ermitteln. Hierbei sind drei verschiedene Fälle zu berücksichtigen, je nachdem, welcher Gruppe der feste Stab angehört. Die Gestalt der Bahnen wird überdies noch von den Verhältnissen der (positiven) Längen  $a, b, c$  abhängen.

## III.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn ein Stab der dritten Gruppe festgehalten wird, etwa  $BC'$ . Die Punkte  $A, D, A'$  und  $D'$  beschreiben Kreise und es gilt lediglich, die Bahnen von  $B'$  und  $C$  zu bestimmen; diese beiden Kurven sind aber kongruent, da  $B'C$  in bezug auf  $BC'$  eine Translation ausführt.

Wir bezeichnen den (veränderlichen) Abstand der Geraden  $l$  und  $l'$  mit  $h$ , den Winkel von  $l$  gegen  $C'B$  mit  $\varphi$ , und die Entfernung  $BC$  mit  $r$ . Dann ist  $h = a \sin \varphi$ , und da  $BC$  gleich der Projektion des Streckenzuges  $BA'C$  auf  $l$  ist, so finden wir für die Polarkoordinaten  $r, \varphi$  von  $C$  die Beziehung

$$r = \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}. \quad (1)$$

Nach Rationalisierung und Einführung der rechtwinkligen Koordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  ergibt sich schließlich für die Bahnkurve des Knotenpunktes  $C$  die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(b^2 + c^2)(x^2 + y^2) + 4a^2 y^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0. \quad (2)$$

Die Bahn von  $C$  erweist sich also als eine Kurve 4. Ordnung; wir bezeichnen sie in der Folge mit  $K_4$ .



## IV.

Die zu den Koordinatenachsen symmetrische Kurve  $K_4$  besitzt die absoluten Kreispunkte der Ebene zu Doppelpunkten, ist also bizirkular. Im allgemeinen weist sie keinen weiteren Doppelpunkt auf und ist daher elliptisch (vom Geschlecht eins<sup>2</sup>). Formt man die Gleichung (2) um auf

$$[r^2 - (b - c)^2] \cdot [r^2 - (b + c)^2] + 4a^2 y^2 = 0, \quad (3)$$

so erkennt man nach der Festsetzung  $b < c$ , daß die Kurve  $K_4$  in dem Ringgebiet zwischen den Kreisen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  mit dem Ursprung  $B$  als Mittelpunkt und den Radien  $c \pm b$  liegt (Abb. 3). Sie berührt diese Kreise in den auf der  $x$ -Achse liegenden Scheitelpunkten  $P_{1,2}(c \pm b, 0)$  und  $Q_{1,2}(-c \mp b, 0)$ .

Für feste Werte von  $b$  und  $c$  hängt die Gestalt der Kurve noch von  $a$  ab. Läßt man  $a$  die Zahlenreihe von 0 gegen  $+\infty$  durchlaufen, so beobachtet man folgenden Gestalt-

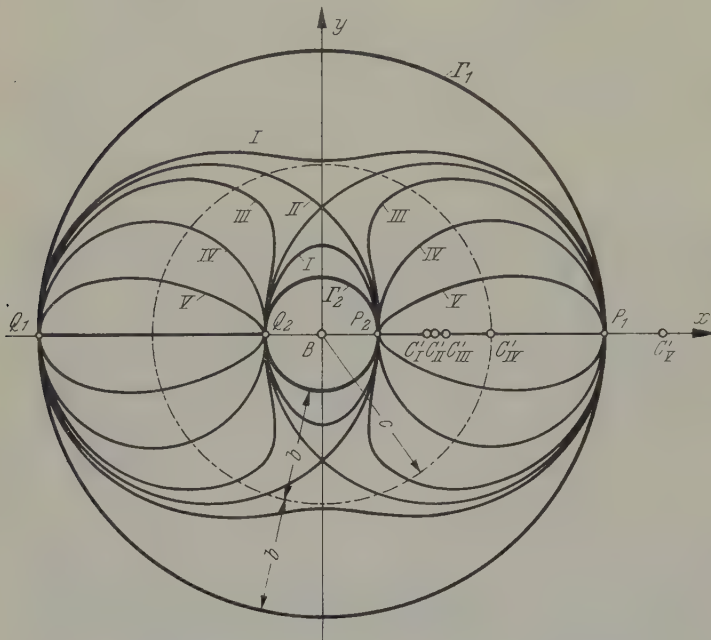


Abb. 3. Bahnformen für den Knoten  $C$  bei Fixierung des Stabes  $BC'$

wandel bei  $K_4$ : Für  $a=0$  zerfällt  $K_4$  in die Kreise  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ ; für  $0 < a \leq p$ , wobei  $p^2 = b^2 c^2 / (b^2 + c^2)$ , besteht  $K_4$  aus zwei konzentrischen Ovalen, wobei das äußere im Grenzfall  $a=p$  Flachpunkte auf der  $y$ -Achse hat. Für  $p < a < b$  erhält der äußere Kurvenzug Einbuchtungen (Abb. 3, I), die für  $a=b$  bis zum inneren Oval vorgedrungen sind und Anlaß zu zwei Doppelpunkten auf der  $y$ -Achse geben:  $K_4$  zerfällt dann in die beiden Kreise mit den Durchmessern  $P_1Q_2$  und  $P_2Q_1$  (Abb. 3, II). Bei weiterem Anwachsen von  $a$  lösen sich die Doppelpunkte wieder auf und man erhält zwei kongruente, spiegelbildlich zur  $y$ -Achse angeordnete Kurvenzüge, die für  $b < a \leq q$

(mit  $q^2 = bc$ ) nierenförmig sind (Abb. 3, III) und im Grenzfall  $a=q$  Flachpunkte in  $P_2$  und  $Q_2$  haben. Für  $q < a$  sind die beiden Kurventeile Ovale, die für  $a=c$  zu Kreisen über den Durchmessern  $P_1P_2$  und  $Q_1Q_2$  werden und mit  $a \rightarrow \infty$  auf die Strecken  $P_1P_2$  und  $Q_1Q_2$  zusammenschrumpfen (Abb. 3, IV).

Im Bereich  $0 \leq a \leq c$  läßt sich die Kurve  $K_4$  deuten als Schnitt eines Torus mit einer Durchmesserebene. Der Torus ist dabei erzeugt zu denken durch einen Kreis

<sup>2</sup> Durch Einführung tetrazyklischer Koordinaten  $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = x : y : -(x^2 + y^2) : 1$  in (2) läßt sich eine eindeutige Abbildung auf die Durchdringungskurve 4. Ordnung der beiden Flächen 2. Ordnung  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3 \xi_4 = 0$  und  $\xi_3^2 + 2(b^2 + c^2)\xi_3 \xi_4 + 4a^2 \xi_2^2 + (b^2 - c^2)^2 \xi_4^2 = 0$  herstellen. Auf diese Weise kann man auch leicht zu einer Parameterdarstellung von  $K_4$  mittels elliptischer Funktionen gelangen, deren Modul das Doppelverhältnis der vier Zahlen  $0, a^2, b^2, c^2$  ist.

vom Radius  $b$ , der um eine in der Kreisebene liegende Achse im Zentralabstand  $c$  rotiert, mithin dargestellt wird durch

$$(x^2 + y^2 + z^2 - b^2 + c^2)^2 - 4c^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (4)$$

Eine die  $x$ -Achse enthaltende Schnittebene kann angesetzt werden mit  $z = y \operatorname{tg} \alpha$ ; führt man in ihr die rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $\eta = y/\cos \alpha$  ein, so erhält man wegen  $z = \eta \sin \alpha$  für die Schnittkurve die Gleichung

$$(x^2 + \eta^2 - b^2 + c^2)^2 - 4c^2(x^2 + \eta^2 \sin^2 \alpha) = 0, \quad (5)$$

die mit (2) übereinstimmt, falls  $\sin \alpha = \pm a/c$  gesetzt wird. Läßt man den Neigungswinkel  $\alpha$  von 0 bis  $\pi/2$  variieren, so erhält man ausgehend von den Äquatorkreisen über die Villarceauxschen Kreise (II) bis zu den Meridiankreisen (IV) alle in Abb. 3 wiedergegebenen Formen, jetzt von einem darstellend-geometrischen Gesichtspunkt aus. — Im Bereich  $a > c$  können die Bahnkurven  $K_4$  nicht mehr als (reelle) Torusschnitte gedeutet werden, hingegen lassen sie sich auffassen als die Meridianprofile von Ringflächen, die durch Drehung eines schräggestellten Kreises erzeugt werden: Der in der  $xz$ -Ebene liegende Meridiankreis der Torusfläche (3) ist dabei um die  $x$ -Achse um einen Winkel  $\beta$  zu kippen, der sich aus  $\cos \beta = c/a$  bestimmt (Abb. 3, V).

## V.

Wir wenden uns neuerlich dem Mechanismus der Abb. 2 zu und setzen jetzt voraus, daß ein Stab der ersten Gruppe festgehalten wird, etwa der Stab  $AD$ . Nun sind die Bahnkurven der Knoten  $A'$  und  $D'$  zu ermitteln, die jedoch nicht gleichberechtigt sind.

Sei  $\varphi$  wiederum der Winkel zwischen  $AD$  und  $l$ , dann ist  $AD' = r$  die Projektion des Streckenzuges  $AC'D'$  auf  $l$ , und man hat

$$r = \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \varphi} \quad (6)$$

als Polargleichung der Bahn von  $D'$ . Vergleich mit (1) lehrt, daß es sich wieder um die Kurve  $K_4$  handelt, jetzt mit  $A$  als Mittelpunkt und  $AD$  als Achse.

Um die Bahn von  $A'$  zu bestimmen, betrachten wir den Spiegelpunkt  $S$  von  $D$  bezüglich  $A$  (Abb. 2);  $S$  ist ein fester Punkt, durch den  $l'$  stets hindurchgeht.  $SA' = r$  ist die Projektion des Streckenzuges  $SDBA'$  auf  $l'$ , man hat also

$$r = 2a \cos \varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \varphi} \quad (7)$$

und damit die Polargleichung der Bahn  $A'$ . Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  führt endlich auf die kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^4 - 2(x^2 + y^2 - 2ax)^2 [(b^2 + c^2)(x^2 + y^2) - 2a^2 y^2] + (b^2 - c^2)^2 (x^2 + y^2)^2 = 0. \quad (8)$$

Da sich die linke Seite nach kurzer Umformung noch durch  $x^2 + y^2$  kürzen läßt, erweist sich die Bahn von  $A'$  als eine Kurve 6. Ordnung. Dieselbe ist symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse  $SAD$ , hat die absoluten Punkte zu dreifachen Punkten und im Ursprung  $S$  einen Doppelpunkt. Für  $a = b$  zerfällt sie in einen Kreis und eine Kurve 4. Ordnung.

Ähnliche Resultate ergeben sich, wenn man einen Stab der zweiten Gruppe festhält, beispielsweise den Stab  $D'A'$ : Die Bahn von  $A$  ist eine Kurve  $K_4$ , jene von  $D$  ist eine Kurve 6. Ordnung.

## VI.

Wir wenden uns nunmehr dem Zwölfstabgetriebe zu, das vier Antiparallelogramme aufweist. Nach Wunderlich muß dann die symmetrische Konfiguration der Abb. 4 vorliegen: Die Knotenpunkte bilden zwei veränderliche konzentrische Rechtecke  $ABCD'$  und  $A'B'C'D$  mit parallelen Seiten; die Gelenksparallelogramme  $AB'CD$  und  $A'BC'D'$  sind gleichfalls konzentrisch und jeweils kongruent. Es zeigt sich nun, daß hier die Frage nach den Knotenbahnen eine höchst einfache Antwort erfährt, die auf einer Eigenschaft des Mechanismus beruht, welche anscheinend noch nicht bemerkt worden ist.

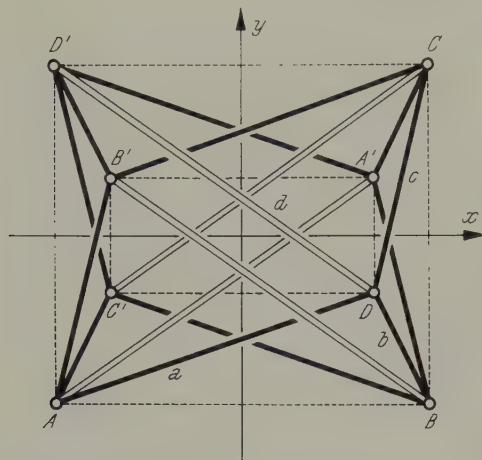


Abb. 4. Zwölfstabgetriebe mit vier Antiparallelogrammen

Beziehen wir die Konfiguration gemäß Abb. 4 auf das durch die gemeinsamen Mittellinien der genannten Rechtecke gebildete Achsenkreuz und bezeichnen wir mit  $x', y'$  die Koordinaten des Punktes  $A'$ , mit  $x, y$  jene von  $C$ , dann gelten für die Stablängen die Relationen

$$\begin{aligned}(x' + x)^2 + (y' - y)^2 &= a^2, \\(x' - x)^2 + (y' - y)^2 &= b^2, \\(x' - x)^2 + (y' + y)^2 &= c^2.\end{aligned}\quad (9)$$

Aus diesen drei Bedingungen für die vier Veränderlichen  $x, y, x', y'$  folgt zunächst einmal die Beweglichkeit des Gelenksystems mit einem Freiheitsgrad. Führen wir noch die Länge  $AA' = BB' = CC' = DD' = d$  ein, so gilt für diese die Beziehung

$$(x' + x)^2 + (y' + y)^2 = d^2. \quad (10)$$

Aus (9) und (10) folgert man über die Identität

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad (11)$$

die Konstanz der Entfernung  $d^2$ . Das bedeutet aber, daß man in dem Zwölfstabgetriebe der Abb. 4 die Knotenpaare  $AA', BB', CC'$  und  $DD'$  durch Stäbe der Länge  $d$  verbinden kann, ohne die Beweglichkeit zu hindern. Der Mechanismus läßt sich mithin zu einem Sechzehnstabgetriebe erweitern, ohne daß sich der Bewegungsvorgang ändert!

Die Frage nach den nichttrivialen Knotenbahnen des Getriebes kann nun ohne weiteres beantwortet werden: Wird etwa der Stab  $AC'$  festgehalten, dann bewegt sich  $A'$  auf einem Kreis um  $A$  und  $C$  auf einem Kreis um  $C'$ , beide mit dem Radius  $d$ . Ähnliche Aussagen ergeben sich bei Fixierung irgendeines anderen Gliedes.

<sup>3</sup> Die Relation (11) ist der bekannte Ausdruck für die Orthogonalität der Diagonalen etwa im Viereck  $ADBA'$ .

(Eingegangen am 21. Juni 1960)



# Wärmespannungen in prismatischen Faltwerken\*

Von G. Valentin, Wien

Mit 27 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Durch verschiedene Temperaturen auf beiden Seiten eines prismatischen Faltwerkes treten in diesem Wärmespannungen auf. Nach Herleitung der Temperaturverteilung werden die allgemeinen Beziehungen für die entstehenden Scheibenspannungen und Biegewirkungen aufgestellt. Anschließend werden die Ergebnisse der numerischen Auswertung dieser Ausdrücke für den einfachsten Fall eines nur zweischeibigen Faltwerkes (Satteldach) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Einzelscheiben dargestellt. Die angeführten Ergebnisse liefern auch für vielscheibige Faltwerke dieser Form einen guten Überblick für die Größe der zu erwartenden Beanspruchungen.

## I. Einleitung

Als Faltwerke bezeichnet man räumliche Flächentragwerke die aus einzelnen dünnen Platten zusammengesetzt sind, die an ihren gemeinsamen Kanten monolithisch miteinander verbunden werden. Die Sonderform der prismatischen Faltwerke entsteht durch Aneinanderfügen von rechteckigen Platten und findet hauptsächlich im Ingenieurhochbau z. B. als Hallendach Verwendung (Abb. 1), wobei sie in der Regel aus Stahlbeton hergestellt werden. Die einwirkenden äußeren Lasten (Eigengewicht, Wind und Schnee) werden im wesentlichen durch in Richtung der Plattenmittelebene wirkende, gleichmäßig über die Stärke verteilte Spannungen (Normal- und Schubspannungen) auf die stützenden Querscheiben, die sogenannten Binderscheiben, übertragen. Außer diesen Scheibenspannungen treten aber auch noch Biegewirkungen, d. h. Biegemomente und Querkräfte, in den Platten auf, deren Anteil im Verhältnis zu den Scheibenspannungen

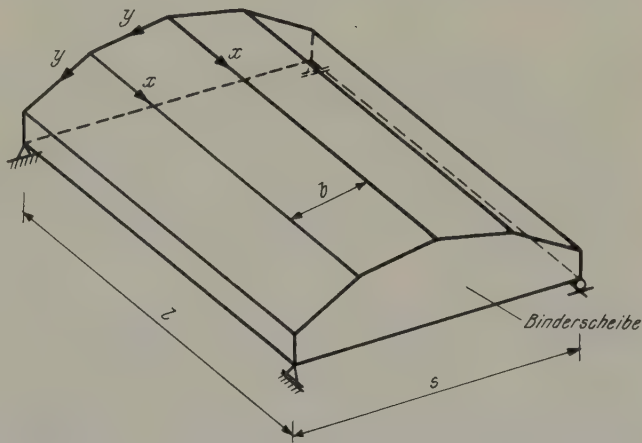


Abb. 1. Prismatisches Faltwerk

aber wesentlich von der Form des gesamten Faltwerkes, den Seitenverhältnissen der Einzelplatten und der Art der Belastung abhängt. Diese Beanspruchungen können nach einem der bekannten Verfahren ermittelt werden (siehe z. B. Girkmann<sup>1</sup>).

Da Faltwerke räumliche Gebilde sind, werden außer den durch die oben angeführten Lasten hervorgerufenen Beanspruchungen noch weitere Beanspruchungen durch die Einwirkung von Temperaturunterschieden entstehen. Diese zuletzt genannten Wirkungen sollen in der vorliegenden Abhandlung untersucht werden. Dabei wird zunächst nur die Wirkung der mittleren, gleichmäßig über die Plattenstärke verteilten Temperaturänderung behandelt, da bei der üblichen Annahme einer gegenüber den

\* Die Abschnitte I bis IV der vorliegenden Abhandlung sind ein Auszug einer von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur der Technischen Hochschule Wien genehmigten Dissertation. Referenten: Prof. Dr. G. Heinrich und Prof. Dr. K. Jäger.

<sup>1</sup> K. Girkmann: Flächentragwerke, 4. Aufl. Wien: Springer-Verlag, 1956.

übrigen Abmessungen kleinen Plattenstärke der Temperaturgradient klein bleibt und daher keine wesentliche Abweichung der wirklichen Verteilung von der hier angenommenen zu erwarten ist. Andererseits liefert bereits diese über die Stärke konstante Temperatur außer Scheibenkräften auch Biegewirkungen, da es sich bei dem vorliegenden Problem nicht um eine ebene Platte oder Scheibe allein handelt, sondern um mehrere ebene Scheiben, die räumlich zusammengesetzt werden. Allen hier durchgeführten Untersuchungen liegen die üblichen Annahmen der Elastizitätstheorie, nämlich ein homogener, isotroper Werkstoff und die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes zugrunde.

## II. Die Temperaturverteilung

Das untersuchte faltwerk soll, entsprechend der häufigsten Anwendung im Bauwesen, den oberen Abschluß einer Halle gegen die äußere Umgebung bilden. Am Anfang sei die innere Temperatur, die Außentemperatur und damit auch die Temperatur der einzelnen Platten und der Binderscheiben gleich vorausgesetzt. Durch äußere Einflüsse, die hier nicht näher untersucht werden, z. B. durch Erwärmung der umgebenden Luft, soll sich nun die Außentemperatur erhöhen. Dabei wird weiters vorausgesetzt, daß die Binderscheiben die ursprüngliche Temperatur beibehalten; dies ist einerseits eine Folge der großen Wärmekapazität der Binderscheiben, andererseits wird angenommen, daß

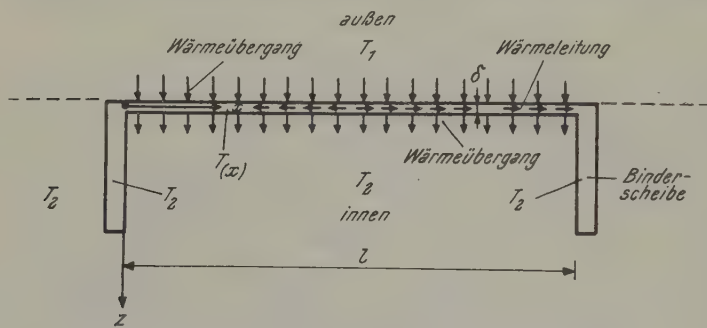


Abb. 2. Bezeichnungen und gegebene Temperaturen

sie mit der Außenluft nicht in Berührung kommen. Bei einer gleichzeitigen Erwärmung der Binderscheiben mit der Umgebung und den anschließenden Platten würden ja praktisch gar keine inneren Spannungen im faltwerk auftreten. Da der Ausgleich des Temperaturunterschiedes zwischen Außen- und

Innenluft nur sehr langsam erfolgen wird (großes Innenvolumen), kann der Vorgang in guter Näherung als zeitunabhängig, d. h. stationär, angesehen werden. Es wird sich dabei eine Wärmeleitung in den Platten zu den Binderscheiben und ein Wärmedurchgang durch die Platten von außen nach innen einstellen. Das Verhältnis dieser beiden Anteile ist durch das Verhältnis von Wärmeleitzahl zu Wärmeübergangszahl für den untersuchten Werkstoff gegeben. In der Querrichtung des faltwerkes (in Richtung der kleineren Abmessung der Einzelplatten) kann der Temperaturverlauf konstant vorausgesetzt werden, da die Außentemperatur konstant ist. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die Temperaturverteilung als Funktion nur einer Variablen, und zwar der Koordinate in der Längsrichtung, aufstellen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 und unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung für ein Scheibenelement erhält man die Differentialgleichung der Temperaturverteilung (vgl. Melan und Parkus<sup>2</sup>). Sie lautet:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{k_a + k_i}{\lambda \delta} T(x) = -\frac{k_a}{\lambda \delta} T_1 - \frac{k_i}{\lambda \delta} T_2. \quad (1)$$

<sup>2</sup> E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen. Wien: Springer-Verlag, 1953.

Dabei bedeutet:

- $\lambda \dots$  Wärmeleitzahl
- $k_a \dots$  Wärmeübergangszahl außen
- $k_i \dots$  Wärmeübergangszahl innen
- $\delta \dots$  Plattenstärke (siehe Abb. 2)
- $T_1 \dots$  Außentemperatur (konstant)
- $T_2 \dots$  Innentemperatur (konstant)
- $T_{(x)} \dots$  Temperatur der Platte im Schnitt  $x$   
(von der Binderscheibe an gezählt)

Setzt man nun, wie es für die meist auftretenden Temperaturbereiche zutreffend ist, die physikalischen Größen als temperaturunabhängig voraus, so sind nicht die absoluten Temperaturen, sondern nur ihre Differenzen maßgebend. Es ist dann zweckmäßig, folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$T_0 = T_1 - T_2; \quad \mathfrak{T}_{(x)} = T_{(x)} - T_2.$$

Mit der durch das Material und die Plattenstärke gegebenen Konstanten

$$a^2 = \frac{k_a + k_i}{\lambda \delta}$$

und unter Beachtung, daß  $T_2 = \text{konst.}$  gilt, erhält man aus (1) die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2 \mathfrak{T}_{(x)}}{dx^2} - a^2 \mathfrak{T}_{(x)} = -\frac{k_a}{\lambda \delta} T_0. \quad (1a)$$

Für die weiteren Untersuchungen ist es am günstigsten, alle gesuchten Größen durch unendliche trigonometrische Reihen darzustellen\*. Daher soll auch die Temperaturverteilung in dieser Form verwendet werden. Entwickelt man nun die rechte Seite der obigen Gleichung in eine entsprechende Fourier-Reihe, so lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathfrak{T}_{(x)}}{dx^2} - a^2 \mathfrak{T}_{(x)} = -\frac{4 k_a T_0}{\lambda \delta \pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \alpha_n x, \quad (1b)$$

wobei zur Abkürzung  $\frac{n\pi}{l} = \alpha_n$  gesetzt wurde.

Die Randbedingungen

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l: \quad \mathfrak{T}_{(x)} = 0, \text{ d. h. } T_{(x)} = T_2$$

besagen, daß an den Binderscheiben die Temperatur in den Faltwerksplatten gleich der Temperatur in den Binderscheiben und damit gleich der Temperatur  $T_2$  des Innenraumes sein muß; daraus folgt, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann, die Lösung der Differentialgleichung mit

$$\mathfrak{T}_{(x)} = \frac{4 k_a T_0}{(k_a + k_i) l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2 / a^2)} \sin \alpha_n x. \quad (2)$$

Diese Funktion ist symmetrisch zu  $x = l/2$  und gibt für den gewünschten Bereich von  $0 \leq x \leq l$  die gesuchte Temperaturverteilung in dem Faltwerk an.

\* s. Fußnote 1, S. 223.



### III. Die Scheibenspannungen

#### 1. Die allgemeinen Gleichungen

Unter Scheibenspannungen versteht man Spannungen, die in einem Bauteil dessen eine Abmessung wesentlich geringer ist als die Abmessungen in den beiden anderen Richtungen, gleichmäßig verteilt über die Stärke und in Richtung der Ebene der beiden größeren Ausdehnungen wirken. Sie rufen nur Verformungen in dieser Ebene hervor, abgesehen von Instabilitäterscheinungen, die hier außer Betracht bleiben sollen. Man kann sich nun zunächst das Faltwerk in einzelne Scheiben zerlegt denken und in diesen die durch die Temperaturunterschiede entstehenden Spannungen und Verformungen bestimmen. Aus den letzteren können dann, da der Zusammenhang im ganzen System bestehen bleiben muß, die Biegewirkungen abgeleitet werden, wie in dem nächsten Abschnitt gezeigt wird.

In einer ebenen Scheibe entstehen immer dann Temperaturspannungen und dadurch hervorgerufene zusätzliche Verformungen, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial y^2} = \Delta \mathfrak{T} = 0$$

nicht mehr erfüllt ist\*. Es werden daher auch infolge des Temperaturverlaufes nach Gl. (2) Wärmespannungen in den Einzelscheiben entstehen, die unter Berücksichtigung der vorhandenen Randbedingungen aus der verallgemeinerten Scheibengleichung bestimmt werden können. Bekanntlich lautet die allgemeine Scheibengleichung, die auch Temperaturänderungen berücksichtigt,

$$\Delta \Delta F = -E \alpha_t \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Dabei bedeutet  $F$  die Airysche Spannungsfunktion, die in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Spannungen folgendermaßen definiert wird:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy} \quad (4)$$

Weiters ist unter  $E$  der Elastizitätsmodul des Scheibenwerkstoffes und unter  $\alpha_t$  seine Wärmedehnzahl zu verstehen. Mit Benützung der durch Gl. (2) gegebenen Temperaturverteilung und nach Einführung des dimensionslosen Faktors

$$\kappa_0 = \frac{4 \alpha_t T_0 k_a}{(k_a + k_i)}$$

lautet nun die Scheibengleichung

$$\Delta \Delta F = \frac{E \kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(1 + \alpha_n^2/a^2)} \sin \alpha_n x. \quad (3a)$$

Die allgemeine Lösung dieser Scheibengleichung kann, unter Berücksichtigung der vorhandenen Symmetrie des Faltwerkes in der  $x$ -Richtung und der partikulären Lösung, wie folgt angesetzt werden:

$$F = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[ A_n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \alpha_n y + B_n \alpha_n y \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \alpha_n y + C_n \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \frac{E \kappa_0}{l} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)} \right] \sin \alpha_n x \quad (5)$$

Die Koeffizienten  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  und  $D_n$  sind aus den anschließend näher erläuterten Randbedingungen zu bestimmen.

\* s. Fußnote 2, S. 224.

Entsprechend der üblichen Theorie der Faltwerke und Zylinderschalen werden auch hier die beiden Binderscheiben in ihrer Ebene als vollkommen starr, quer zu ihrer Ebene als vollkommen biegeweich vorausgesetzt. Denkt man sich nun, wie bereits einleitend bemerkt, die einzelnen Platten durch Schnitte an den Faltwerkskanten voneinander getrennt (die Binderscheiben werden dabei nicht durchgeschnitten), so entsteht ein System von Scheiben, die auf den Binderscheiben gelagert sind und durch die Temperaturänderung beansprucht werden. Daraus folgt aber, daß die Einzelscheiben an ihren Längsrändern (entsprechend Abb. 1 die Ränder  $y = \text{konst.}$ ) weder Normalspannungen in der  $y$ -Richtung noch Schubspannungen aufnehmen können und diese daher an den beiden Rändern verschwinden müssen. Weiters folgt aus der Annahme über die Binderscheiben, daß an den Schmalrändern der Faltwerksscheiben keine Normalspannungen in der  $x$ -Richtung (Längsrichtung) auftreten dürfen, wohl aber Schubspannungen von den Einzelscheiben auf die Binderscheiben übertragen werden können.

Es müssen also folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l: \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } y = 0 \text{ und } y = b; \\ \text{für } y = 0 \text{ und } y = b: \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Die Randbedingung (6) ist bereits durch den Ansatz (5) erfüllt, da nur der Anteil mit „ $\sin \alpha_n x$ “ berücksichtigt wurde. Die vier Randbedingungen (7) können somit durch die vier noch unbekannten Koeffizienten erfüllt werden. Führt man in den Gl. (7) die Beziehung (5) und die entsprechenden Randwerte für  $y$  ein, so erhält man als Ergebnis für die Koeffizienten folgende Ausdrücke:

$$A_n = -\frac{E \kappa_0}{l} \cdot \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)}; \quad B_n = \frac{E \kappa_0}{l} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)} \frac{\sin \alpha_n b}{(\sin \alpha_n b + \alpha_n b)};$$

$$C_n = -D_n = \frac{E \kappa_0}{l} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)} \frac{(\cos \alpha_n b - 1)}{(\sin \alpha_n b + \alpha_n b)}.$$

Damit folgt für die Spannungsfunktion gemäß Gl. (5)

$$F = \frac{E \kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} [\sin \alpha_n b (\alpha_n y \sin \alpha_n y - \cos \alpha_n y + 1) - (\cos \alpha_n b - 1) (\alpha_n y \cos \alpha_n y - \sin \alpha_n y) - \alpha_n b (\cos \alpha_n y - 1)] \sin \alpha_n x \quad (8)$$

Schließlich erhält man mit den Definitionsgleichungen (4) die gesuchten Spannungen in der Form:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{E \kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} [\sin \alpha_n b (\alpha_n y \sin \alpha_n y + \cos \alpha_n y) - (\cos \alpha_n b - 1) (\alpha_n y \cos \alpha_n y + \sin \alpha_n y) - \alpha_n b \cos \alpha_n y] \sin \alpha_n x \quad (9/1)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{E \kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} [\sin \alpha_n b (\alpha_n y \sin \alpha_n y - \cos \alpha_n y + 1) - (\cos \alpha_n b - 1) (\alpha_n y \cos \alpha_n y - \sin \alpha_n y) - \alpha_n b (\cos \alpha_n y - 1)] \sin \alpha_n x \quad (9/2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{E \kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} [\sin \alpha_n b \cdot \alpha_n y \cos \alpha_n y - (\cos \alpha_n b - 1) \alpha_n y \sin \alpha_n y - \alpha_n b \sin \alpha_n y] \cos \alpha_n x. \quad (9/3)$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß an den Scheibenschmalseiten nicht nur voraussetzungsgemäß die Normalspannungen  $\sigma_x$  verschwinden, sondern daß auch die Normalspannungen  $\sigma_y$  gleich Null werden. Dagegen erreichen die Schubspannungen dort ihren größten Wert, der von den Binderscheiben aufgenommen werden muß.

Im Zusammenhang mit den Scheibenspannungen und den Temperaturänderungen treten auch Verzerrungen und Verschiebungen auf. Erst die Kenntnis der letzteren ermöglicht aber die Aufstellung der Zusammenhangsbedingungen zwischen den einzelnen Scheiben bzw. Platten und bildet somit die Grundlage für die Ermittlung der Biegewirkungen in den Einzelplatten. Diese Verschiebungen sollen daher anschließend bestimmt werden. Bezeichnet man mit  $u$  und  $v$  die Verschiebungen eines Scheibenpunktes in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung und bedeutet  $\mu$  die Querdehnungszahl des Werkstoffes, dann gelten für die Verschiebungen die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} Eu &= \int (\sigma_x - \mu \sigma_y + E \alpha_t \mathfrak{L}) dx + \Phi_{(y)} = \\ &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{E \kappa_0}{l} \int \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)} \sin \alpha_n x dx + \Phi_{(y)} \end{aligned} \quad (10/1)$$

$$\begin{aligned} Ev &= \int (\sigma_y - \mu \sigma_x + E \alpha_t \mathfrak{L}) dy + \Psi_{(x)} = \\ &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{E \kappa_0}{l} \int \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (1 + \alpha_n^2/a^2)} \sin \alpha_n x dy + \Psi_{(x)}. \end{aligned} \quad (10/2)$$

Die bei dieser Integration auftretenden Funktionen  $\Phi_{(y)}$  und  $\Psi_{(x)}$  werden für temperatbeanspruchte rechteckige Scheiben mit doppeltsymmetrischem Spannungszustand bei unverschieblich gedachtem Scheibenmittelpunkt zu Null und sind daher in der Folge nicht weiter zu berücksichtigen. Man erhält somit aus den Gl. (10) unter Benützung der Gl. (8) für die Verschiebungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)}{\alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} \{ \sin \alpha_n b [(1 + \mu) (\alpha_n y \sin \alpha_n y + 1) + \\ &+ (1 - \mu) \cos \alpha_n y] - (\cos \alpha_n b - 1) [(1 + \mu) \alpha_n y \cos \alpha_n y + (1 - \mu) \sin \alpha_n y] - \\ &- \alpha_n b (1 + \mu) (\cos \alpha_n y - 1) \} \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (11/1)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)}{\alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} \{ \sin \alpha_n b [(1 + \mu) \alpha_n y \cos \alpha_n y - 2 \sin \alpha_n y] - \\ &- (\cos \alpha_n b - 1) [(1 + \mu) \alpha_n y \sin \alpha_n y - 2 \cos \alpha_n y] - \alpha_n b (1 + \mu) \sin \alpha_n y \} \sin \alpha_n x. \end{aligned} \quad (11/2)$$

Für die Verschiebung am Scheibenlängsrand  $y = 0$ , die für die Zusammenhangsbedingungen später benötigt wird, erhält man schließlich den Ausdruck

$$(v)_{y=0} = \frac{2\kappa_0}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1) (\cos \alpha_n b - 1)}{\alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\sin \alpha_n b + \alpha_n b)} \sin \alpha_n x. \quad (12)$$

## 2. Numerische Auswertung

Um über den Verlauf der Scheibenspannungen grundsätzliche Aussagen machen zu können, müssen die Spannungsgleichungen (9) numerisch ausgewertet werden. Dazu ist es aber erforderlich, gewisse Zahlenwerte anzugeben, da eine allgemeine Auswertung dieser Summen nicht möglich ist. Die Berechnung soll für verschiedene Seitenverhältnisse der Einzelscheiben durchgeführt werden, da diese von wesentlichem Einfluß auf den Spannungsverlauf sind. Bezeichnet man das Seitenverhältnis der Einzel-



scheibe mit  $\beta = l/b$  als Schlankheit der Scheibe, dann soll die Spannungsverteilung für folgende Werte untersucht werden (Abb. 3):

$\beta = 2$  als unterster Grenzwert, da kleinere Schlankheiten für prismatische Faltwerke kaum in Betracht kommen.

$\beta = 3$  als Zwischenwert.

$\beta = 5$  als oberer Grenzwert, da bei größeren Schlankheiten nennenswerte Spannungen infolge einer derartigen Temperaturverteilung nicht zu erwarten sind.

Zur Erleichterung der zahlenmäßigen Auswertung wird für alle Seitenverhältnisse die Länge gleich groß mit  $l = 10,00$  m vorausgesetzt.

Entsprechend der häufigsten Ausführung der Faltwerke aus Stahlbeton wird diese auch der numerischen Auswertung zugrunde gelegt. Daraus folgt nach Bruckmayer<sup>3</sup> eine mittlere Wärmeleitfähigkeit mit  $\lambda = 2,0$  kcal/mh°C, eine äußere Wärmeübergangszahl (unabhängig vom Werkstoff) mit  $k_a = 20,00$  kcal/m² h°C und eine innere Wärmeübergangszahl für einen Übergang von oben nach unten, wie er hier vorausgesetzt wurde, mit  $k_i = 5,00$  kcal/m² h°C. Schließlich wird die Stärke der Scheiben bzw. der Platten mit  $\delta = 10$  cm festgelegt. Somit folgt

$$\alpha^2 = \frac{k_a + k_i}{\lambda \delta} = \frac{20,0 + 5,0}{2,0 \cdot 0,10} = 125,0 \text{ m}^{-2}.$$

Die Ergebnisse der Spannungsberechnung werden als Einheitswerte  $\sigma^*$  und  $\tau^*$  angegeben, d. h. für ein Material mit  $E = 1$  kg/cm² und  $\alpha_t = 1,0^\circ\text{C}^{-1}$  bei  $T_0 = 1,0^\circ\text{C}$ , um eine möglichst allgemeine Verwendung zu ermöglichen<sup>4</sup>. Man erhält aus diesen Werten die wirklichen Spannungen nach der Beziehung

$$\sigma = \sigma^* \cdot E \cdot \alpha_t \cdot T_0;$$

$$\tau = \tau^* \cdot E \cdot \alpha_t \cdot T_0.$$

Diese Einheitswerte werden auch in den folgenden Spannungsbildern (Abb. 4 bis 9) angegeben, die den Verlauf der Scheibenspannungen in Abhängigkeit von der Schlankheit  $\beta$  in Schnitten  $y = \text{konst.}$  und  $x = \text{konst.}$  zeigen.

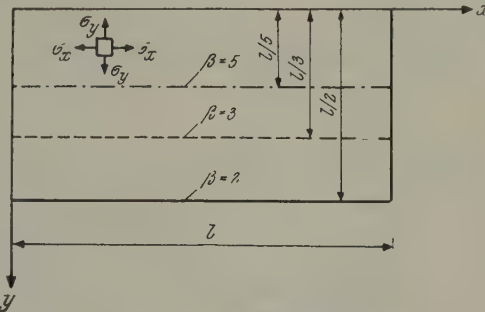


Abb. 3. Die Seitenverhältnisse

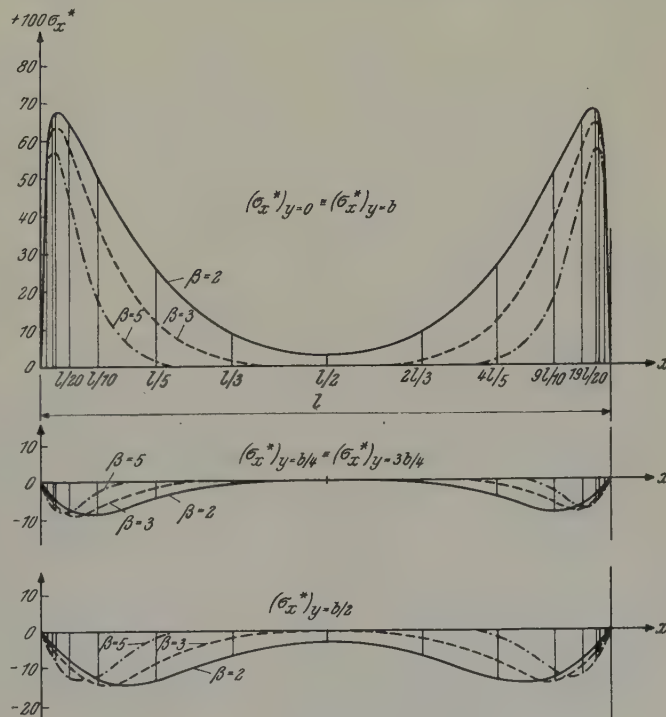
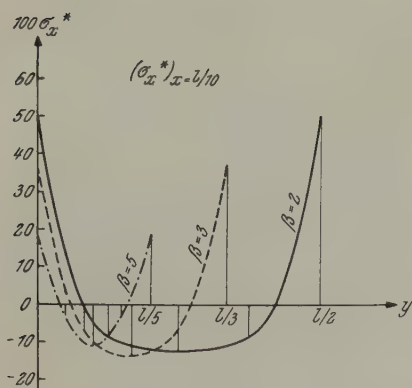
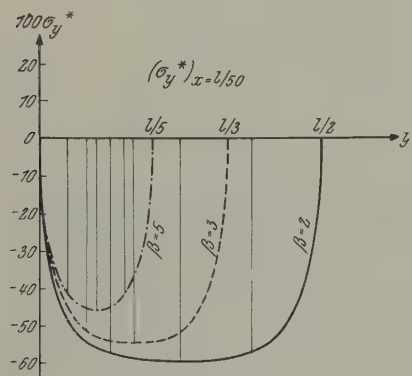


Abb. 4. Die Scheibenspannungen  $\sigma_x$

<sup>3</sup> F. Bruckmayer: Der praktische Wärme- und Schallschutz im Hochbau. Wien: Deuticke. 1949.

<sup>4</sup> Vgl. auch K. Klöppel und W. Schönbach: Wärmespannungen in rechteckig berandeten Scheiben. Der Stahlbau 27, 122–125 (1958).

Abb. 5. Die Scheibenspannungen  $\sigma_x$ Abb. 7. Die Scheibenspannungen  $\sigma_y$ 

Für die Beurteilung der Beanspruchung und für die Ausführung sind, besonders im Stahlbetonbau wegen der Bewehrung, auch noch die Hauptnormalspannungen von Interesse. Diese können aus den Werten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  nach den bekannten Gleichungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

ermittelt werden. Mit diesen Hauptnormalspannungen und ihren Richtungen können dann die Hauptnormalspannungstrajektorien bestimmt werden. Ihre Tangenten geben in jedem Punkt die Richtung der Hauptnormalspannungen an, dabei ist

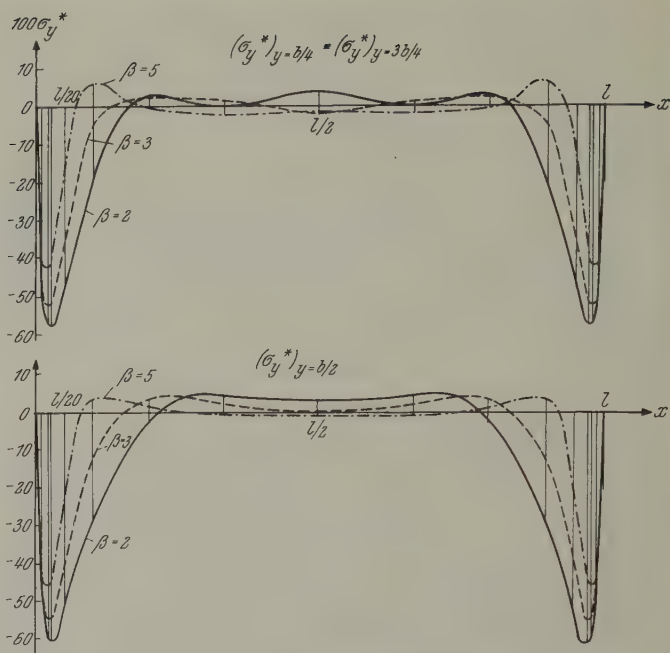
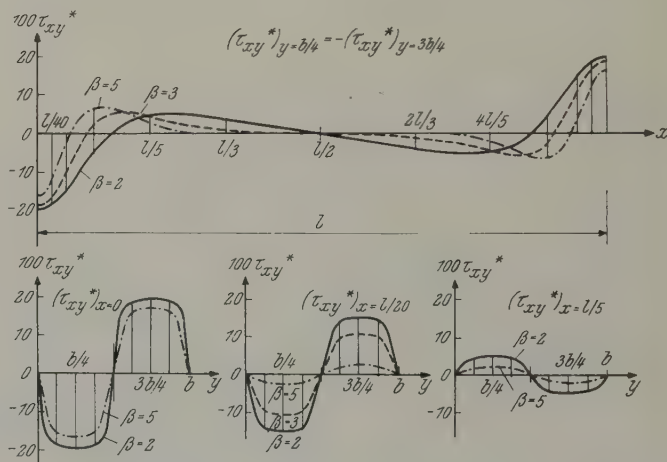
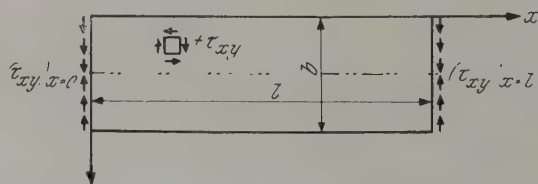
Abb. 6. Die Scheibenspannungen  $\sigma_y$ Abb. 8. Die Schubspannungen  $\tau_{xy}$ 

Abb. 9. Die Wirkungsrichtungen der Schubspannungen

aber zu beachten, daß die Größe der Hauptnormalspannungen längs der Trajektorien veränderlich ist. Für die verschiedenen Seitenverhältnisse sind diese Hauptnormalspannungslinien in der Abb. 10 dargestellt.

Der Vollständigkeit halber wurden schließlich noch für das Seitenverhältnis  $\beta = 2$  die Linien konstanter Hauptnormalspannungen angegeben, die deutlich zeigen, in welchen Bereichen der Scheiben die größten Beanspruchungen auftreten (Abb. 11).

Die größten auftretenden Spannungen liegen bei  $100 \sigma^* = 60,0 \text{ kg/cm}^2$ ; daraus folgen z. B. für die Zahlenwerte  $E = 200\,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5}$  und  $T_0 = 25,0^\circ \text{ C}$  die größten Spannungen mit

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* \cdot E \cdot \alpha_t \cdot T_0 = \\ &= 0,60 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,20 \cdot 10^{-5} \cdot 25 = 36,0 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Bei Druckbeanspruchung entspricht dieser Wert zirka 20% der Prismenfestigkeit des Betons (Beton B 225 vorausgesetzt), Zugspannungen in dieser Größe können vom Beton allein nicht mehr aufgenommen werden, sondern sind zur Gänze durch die Bewehrung weiterzuleiten.

Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß den hier nachgewiesenen Spannungen, die allerdings nur in beschränkten Bereichen in dieser Größe auftreten, noch die Spannungen aus den Biegewirkungen und den äußeren Lasten zu überlagern sind.

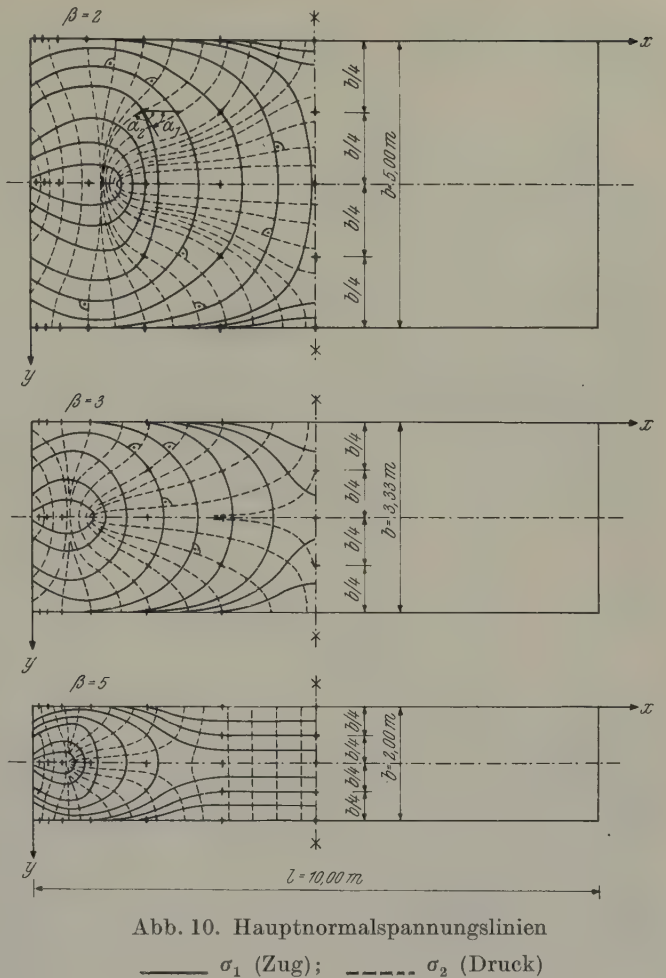


Abb. 10. Hauptnormalspannungslinien  
——  $\sigma_1$  (Zug); - - - -  $\sigma_2$  (Druck)

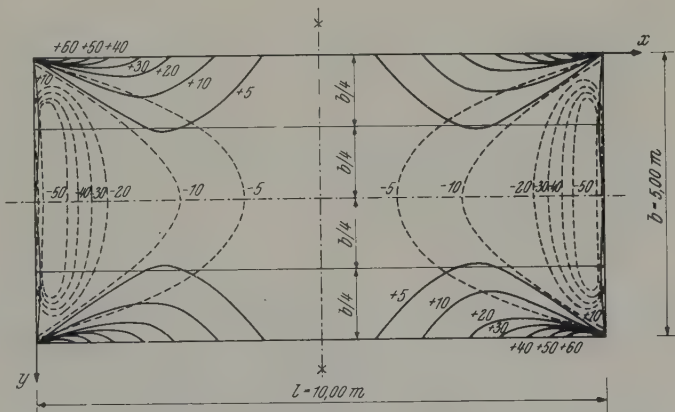


Abb. 11. Linien konstanter Hauptnormalspannung für  $\beta = 2$   
10 bedeutet ...  $10 \cdot (100 \sigma^*)$   
——  $\sigma_1$  (Zug); - - - -  $\sigma_2$  (Druck)



#### IV. Die Biegewirkungen bei frei drehbarer Lagerung an den Plattenschmalseiten

##### 1. Die allgemeinen Gleichungen

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Beziehungen liefern die Spannungen und Verschiebungen der unabhängig gedachten Einzelscheiben des Faltwerkes infolge Temperaturänderung. Im gesamten System, dem Faltwerk, können diese Verformungen aber nicht unabhängig in jeder Scheibe für sich erfolgen, sondern sie werden durch den Zusammenhang an den steifen Kanten in eine ganz bestimmte Abhängigkeit gebracht. Dadurch wird eine Verformung der Einzelscheiben normal zu ihrer Mittelebene hervorgerufen, die das Auftreten von Biegespannungen und Querkräften bedingt. Es wirken also die Faltwerksscheiben auch als Platten, die auf den Binderscheiben gelagert und an den gemeinsamen Kanten steif miteinander verbunden sind. Bei dieser Beanspruchung entstehende sekundäre Scheibenspannungen sind so gering, daß ihr Einfluß auf die Verformung der Einzelscheiben vernachlässigt werden kann.

Um die weiteren Untersuchungen möglichst übersichtlich führen zu können, wird der einfachste Fall eines Faltwerkes vorausgesetzt, nämlich ein „Satteldach“

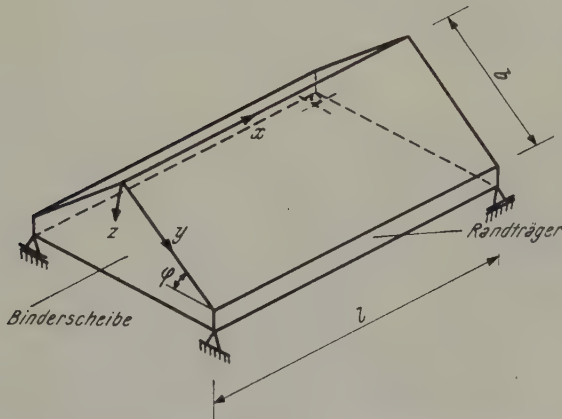


Abb. 12. Zweischeibiges Faltwerk (Satteldach)

bestehend aus zwei Faltwerksscheiben, zwei Binderscheiben und zwei Randträgern (Abb. 12). Die Lagerung des gesamten Systems ist dabei statisch bestimmt angenommen, so daß zusätzliche Zwangskräfte vermieden werden. Grundsätzlich läßt sich dieses Verfahren auch auf Faltwerke mit beliebig vielen Scheiben anwenden, es müssen nur alle erforderlichen Zusammenhangsbedingungen eingeführt werden. Die Ermittlung der Unbekannten führt dann auf ein umfangreiches lineares Gleichungssystem, das die Biegeflächen aller Platten miteinander verknüpft; seine Lösung würde einen

großen Rechenaufwand erfordern. Die grundsätzlichen Aussagen lassen sich jedoch bereits an dem einfachsten Fall gut erkennen, der daher ausführlich behandelt werden wird.

Für eine beliebig gelagerte und belastete dünne Platte läßt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen im Verhältnis zur Plattenstärke folgende Gleichung, die sogenannte Plattengleichung, ableiten\*.

$$\Delta \Delta w = \frac{p(x,y)}{K} \quad (13)$$

Dabei bedeutet:  $w$  ... Verschiebung eines Plattenpunktes quer zur Plattenmittelebene, d. h. in der  $z$ -Richtung

$p(x,y)$  ... Flächenbelastung der Platte

$K = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$  ... Plattensteifigkeit

\* s. Fußnote <sup>1</sup>, S. 223.

Sind durch Lösung dieser Differentialgleichung unter Beachtung der gegebenen Randbedingungen die Verschiebungen  $w$  über den ganzen Plattenbereich ermittelt, dann können daraus die in jedem Punkt vorhandenen Schnittgrößen der Platte, nämlich die Biegemomente, die Drillungsmomente und die Querkräfte, aus den folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad m_y = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad m_{xy} = -(1-\mu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (14)$$

$$q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w); \quad q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (15)$$

Man erhält somit für jeden Rand drei Randschnittgrößen. Mit der oben angegebenen Plattengleichung können wegen der vorausgesetzten Vereinfachungen an jedem Rand aber nur zwei Randwerte befriedigt werden. Man faßt daher die Querkräfte (Scherkräfte) und die statisch den Randdrillungsmomenten gleichwertigen Ersatzscherkräfte zusammen und erfüllt für diese gemeinsam die Randbedingungen bzw. ermittelt so die Auflagerkräfte. Die Ausdrücke lauten:

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (16/1)$$

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (16/2)$$

Wendet man alle diese Beziehungen auf das vorliegende Problem an, dann vereinfacht sich zunächst die Plattengleichung (13) zu

$$\Delta \Delta w = 0, \quad (13a)$$

da durch die Temperaturänderung keine Flächenlasten auf den Platten entstehen bzw. vorhanden sind, sondern nur Verformungen an den Rändern infolge der steifen Kanten die Ursache der Biegewirkungen sind. Welche Randbedingungen sind aber der Ermittlung der Schnittgrößen zugrunde zu legen?

Entsprechend den im vorigen Abschnitt für die Scheibenrandbedingungen aufgestellten Annahmen für die Binderscheiben können auch bei Biegewirkungen keine Spannungen in der Plattenlängsrichtung und daher auch keine Biegemomente  $m_x$  aufgenommen werden. In ihrer Ebene besitzen aber die Binderscheiben voraussetzungsgemäß eine große Steifigkeit, so daß die Platten an ihren Schmalseiten als frei drehbar und längsverschieblich, aber vertikal unnachgiebig gelagert angesehen werden können. Am äußeren Längsrand ( $y = b$ ) wird vorausgesetzt, daß er sich in der Plattenebene ungehindert verformen kann, aber normal zur Plattenebene unnachgiebig gelagert ist. Es müssen daher an diesem Rand die Biegemomente  $m_y$  verschwinden. Praktisch kann diese Lagerung z. B. durch einen torsionsweichen, aber doch nicht zu hohen Randträger mit guter Näherung verwirklicht werden. Alle übrigen Plattenlängsränder (in dem betrachteten Sonderfall ist es nur mehr ein Rand) sind Ränder, deren Verschiebungen und Drehwinkel durch die Zusammenhangsbedingungen gegeben sind und daher aus diesen berechnet werden müssen. Man erhält also eine Platte mit den in Abb. 13 angegebenen Randbedingungen für die Ermittlung der Biegewirkungen. Bei dem vorliegenden Satteldach sind die Zusammenhangsbedingungen an der gemeinsamen Kante (Firstkante) sehr leicht zu formulieren. Die steife Kante liegt in der Symmetrieebene des Systems (Abb. 14) und kann sich daher nur in dieser Ebene verschieben (beidseitige Temperaturerhöhung wurde ja vorausgesetzt). Da aber auch der Winkel zwischen den beiden Platten erhalten bleiben muß, folgt daraus als erste Bedingung entsprechend dem gegebenen Koordinatensystem:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (17)$$

Weiters sieht man aus Abb. 14 (die einen Querschnitt des Faltwerkes im Abstand  $x$  vom Rand zeigt), daß zwischen der Verschiebung  $(v)_{y=0} = v_0$  und der Durchbiegung  $w_0$  an diesem Rand die Beziehung

$$w_0 = v_0 \operatorname{ctg} \varphi \quad (18)$$

gelten muß. Dabei bedeutet  $\varphi$  ... Neigungswinkel der Einzelscheibe bzw. Platte gegen die Horizontale

$v_0$  ... Randverschiebung nach Gl. (12)

Die Gl. (18) liefert somit die Verknüpfung der Scheibenbeanspruchung mit den Biegewirkungen.

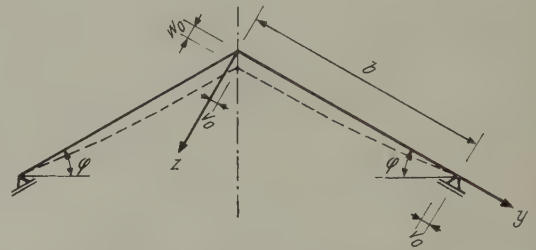
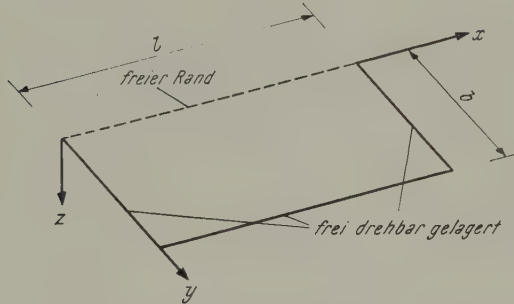


Abb. 13. Die Randbedingungen der Einzelplatte      Abb. 14. Querschnitt und verformtes System

Aus den oben getroffenen Festlegungen folgen die Randbedingungen der übrigen drei Ränder im Koordinatensystem:

$$\text{für } x=0 \text{ und } x=l: w=0; \quad m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\text{für } y=b: w=0; \quad m_y = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Der Reihenansatz der Biegefläche zur Lösung der Gl. (13a), mit dem bereits ein Teil der Randbedingungen von vornherein befriedigt wird, lautet:

$$w = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (\mathfrak{A}_n \operatorname{Cof} \alpha_n y + \mathfrak{B}_n \alpha_n y \operatorname{Sin} \alpha_n y + \mathfrak{C}_n \operatorname{Sin} \alpha_n y + \mathfrak{D}_n \alpha_n y \operatorname{Cof} \alpha_n y) \sin \alpha_n x. \quad (21)$$

Dabei bedeutet wieder

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Der Ansatz erfüllt die Randbedingungen (19), da nur die „sin“-Funktionen berücksichtigt wurden. Die geraden Glieder wurden wieder weggelassen, da auch hier die Beanspruchungen symmetrisch zu  $x=l/2$  sein müssen. Es bleiben daher die vier Koeffizienten  $\mathfrak{A}_n$ ,  $\mathfrak{B}_n$ ,  $\mathfrak{C}_n$  und  $\mathfrak{D}_n$  zur Erfüllung der vier Randbedingungen der Gl. (17), (18) und (20). Führt man nun den Ansatz (21) in die Randbedingungen ein und ermittelt die Koeffizienten, so erhält man die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n &= -\frac{2 \kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l (1 + \alpha_n^2/a^2)} \cdot \frac{(\operatorname{Cof} \alpha_n b - 1)}{(\operatorname{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \\ \mathfrak{B}_n &= \frac{2 \kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l (1 + \alpha_n^2/a^2)} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \alpha_n b \operatorname{Cof} \alpha_n b (\operatorname{Cof} \alpha_n b - 1)}{(\operatorname{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b) (\operatorname{Sin} \alpha_n b \operatorname{Cof} \alpha_n b - \alpha_n b)} \\ \mathfrak{C}_n &= -\mathfrak{D}_n = \frac{2 \kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l (1 + \alpha_n^2/a^2)} \cdot \frac{\operatorname{Cof}^2 \alpha_n b (\operatorname{Cof} \alpha_n b - 1)}{(\operatorname{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b) (\operatorname{Sin} \alpha_n b \operatorname{Cof} \alpha_n b - \alpha_n b)} \end{aligned}$$



Damit lautet die Gleichung der Biegefläche

$$w = -\frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{\alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left[ \mathfrak{Cof} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} (\alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y - \mathfrak{Sin} \alpha_n y) \right] \sin \alpha_n x. \quad (22)$$

Schließlich liefert die Gl. (22) mit den Gl. (14) die gesuchten Biege- bzw. Drillungsmomente der Platte mit:

$$m_x = -\frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left\{ (1 - \mu) \mathfrak{Cof} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y - 2\mu \mathfrak{Cof} \alpha_n y] + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y - (1 + \mu) \mathfrak{Sin} \alpha_n y] \right\} \sin \alpha_n x \quad (23/1)$$

$$m_y = \frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left\{ (1 - \mu) \mathfrak{Cof} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y + 2\mathfrak{Cof} \alpha_n y] + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y + (1 + \mu) \mathfrak{Sin} \alpha_n y] \right\} \sin \alpha_n x \quad (23/2)$$

$$m_{xy} = \frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} (1 - \mu) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left[ \mathfrak{Sin} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} (\alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y + \mathfrak{Sin} \alpha_n y) + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y \right] \cos \alpha_n x. \quad (23/3)$$

Aus der letzten Gleichung ist sofort zu erkennen, daß am Rand  $y=0$  (an der Firstkante) die Drillungsmomente verschwinden. Dies folgt bereits aus den Randbedingungen, da längs dieser Kante die Neigungswinkel der Biegefläche normal zum Rand auf Grund der Symmetrie verschwinden müssen. Damit führt Gl. (16) zur Beziehung

$$(\bar{q}_y)_{y=0} = (q_y)_{y=0}.$$

Es ergeben sich daher die folgenden Ausdrücke für die Scherkräfte:

$$\bar{q}_x = \frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\alpha_n (\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left\{ (1 - \mu) \mathfrak{Cof} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y + 2(2 - \mu) \mathfrak{Cof} \alpha_n y] + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y + (3 - \mu) \mathfrak{Sin} \alpha_n y] \right\} \cos \alpha_n x \quad (24/1)$$

$$\bar{q}_y = -\frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\alpha_n (\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \left\{ (1 - \mu) \mathfrak{Sin} \alpha_n y - \frac{\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Cof} \alpha_n y - (1 + \mu) \mathfrak{Sin} \alpha_n y] + \frac{(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} [(1 - \mu) \alpha_n y \mathfrak{Sin} \alpha_n y - 2 \mathfrak{Cof} \alpha_n y] \right\} \sin \alpha_n x \quad (24/2)$$

$$(q_y)_{y=0} = \frac{2K\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\alpha_n (\mathfrak{Cof} \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{Sin} \alpha_n b + \alpha_n b)} \cdot \frac{2(\mathfrak{Cof} 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{Sin} 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} \sin \alpha_n x. \quad (25)$$

Mit den Gl. (23), (24) und (25) sind die allgemeinen Beziehungen für die Biegebeanspruchung gegeben, deren Auswertungsergebnisse im nächsten Abschnitt angegeben werden.

## 2. Numerische Auswertung

Außer den bereits bei der Ermittlung der Scheibenspannungen angeführten Zahlenwerten sind zur Bestimmung der Biegewirkungen noch weitere Angaben erforderlich. Vergleicht man die Beziehungen (9) mit den Beziehungen (23) und (24), so erkennt man, daß wohl die Scheibenspannungen, nicht aber die Biegewirkungen von der Querdehnungszahl  $\mu$  unabhängig sind. Auf Grund von vielen Versuchen wurde festgestellt, daß die Querdehnungszahl bei Beton von der jeweiligen Laststufe abhängig ist<sup>5</sup> und

mit wachsender Beanspruchung zunimmt. Da hier, wie die Auswertung zeigt, höhere Beanspruchungen nur in beschränkten Bereichen auftreten, kann für die weitere Berechnung die Querdehnungszahl  $\mu = 0$  gesetzt werden (eine Annahme, die in der Regel für Flächentragwerke aus Stahlbeton getroffen wird). Der Neigungswinkel der beiden Faltwerksplatten soll  $\varphi = 30^\circ$  und damit  $\operatorname{tg} \varphi = 1,732$  sein. Für alle übrigen Größen gelten dieselben Werte wie im Abschnitt III/2.

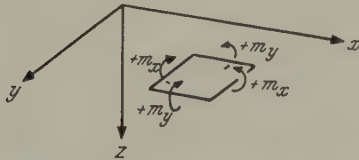


Abb. 15. Die positiven Richtungen der Biegemomente

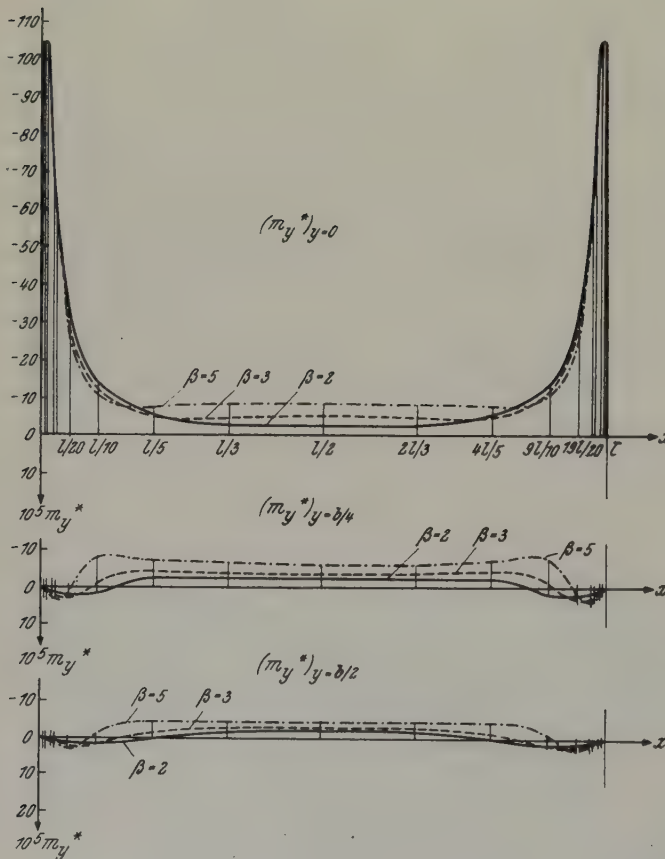


Abb. 16. Die Biegemomente  $m_y$

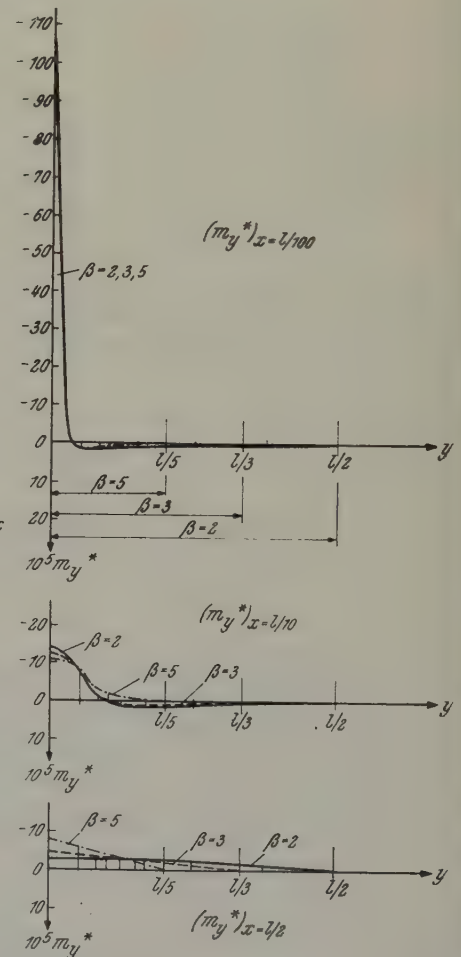


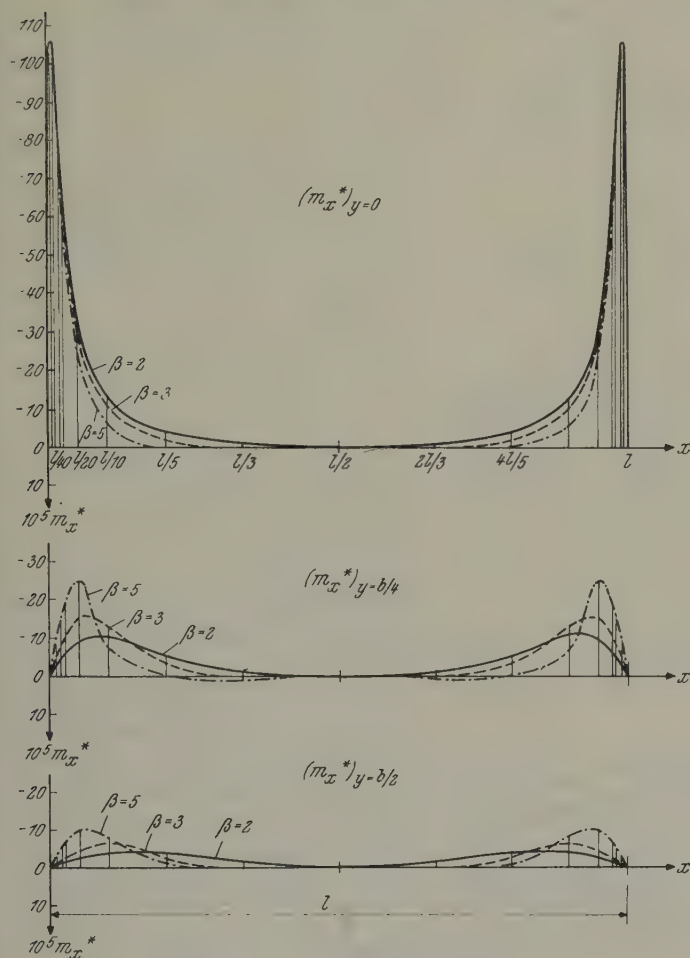
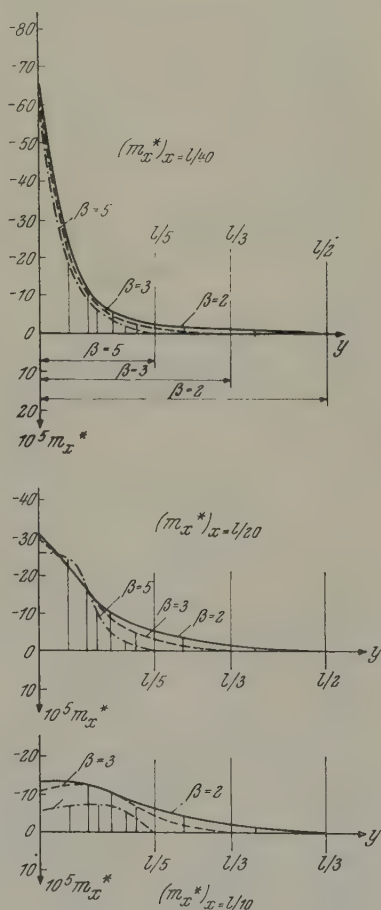
Abb. 17. Die Biegemomente  $m_x$

<sup>5</sup> K. Jäger: Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau. Wien: Manz. 1948.

Auch für die Biegewirkungen sollen die Werte so allgemein als möglich angegeben werden, daher sind wieder Einheitswerte  $m^*$  und  $q^*$  in den Diagrammen eingetragen. Man erhält, wie bei den Scheibenspannungen, die wirklich auftretenden Momente und Scherkräfte nach den Beziehungen:

$$m = m^* \cdot E \cdot \alpha_i \cdot T_0; \quad q = q^* \cdot E \cdot \alpha_i \cdot T_0.$$

Die Summen in den Ausdrücken (23/1) und (23/2) konvergieren für den Rand  $y = 0$  schlecht, sie konnten jedoch dank dem Entgegenkommen des Herrn Prof. Dr. R. Inzinger, Vorstand des Mathematischen Labors der Technischen Hochschule Wien, auf der

Abb. 18. Die Biegemomente  $m_x$ Abb. 19. Die Biegemomente  $m_x$ 

elektronischen Rechenanlage des Labors mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt werden. Die Ergebnisse der umfangreichen zahlenmäßigen Auswertung aller oben angeführten Beziehungen sind in den Abb. 15 bis 24 dargestellt.

Wie bei den Scheibenspannungen die Hauptspannungen, so sind bei den Biebeanspruchungen die Hauptmomente von wesentlichem Interesse. Ihre Richtung gibt im Stahlbetonbau die ideale Richtung für die Biegebewehrung an, ihre Größe ist für die Bemessung der Plattenstärke und der Bewehrung maßgebend. Die Beziehungen haben die gleiche Form wie die Hauptspannungsgleichungen und lauten:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} (m_x + m_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4 m_{xy}^2}; \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 m_{xy}}{(m_x - m_y)}.$$



Sind die Größen  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  für die ganze Platte, so wie im vorliegenden Fall, gegeben, dann können die Größe und die Richtung der Hauptmomente an jeder Stelle bestimmt und damit die Hauptmomentenlinien gezeichnet werden. Auch bei den Hauptmomentenlinien ist zu beachten, daß die Größe der Hauptmomente längs dieser Linien veränderlich ist. Für die Seitenverhältnisse  $\beta = 2$  und  $\beta = 5$  sind diese Linien in Abb. 25 dargestellt.

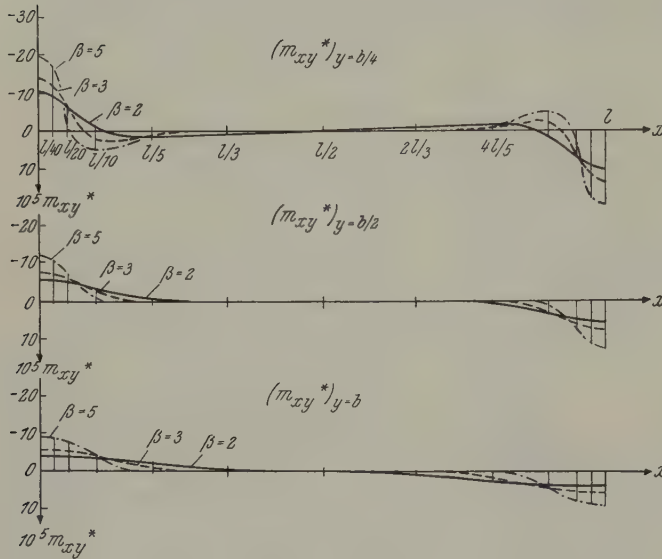
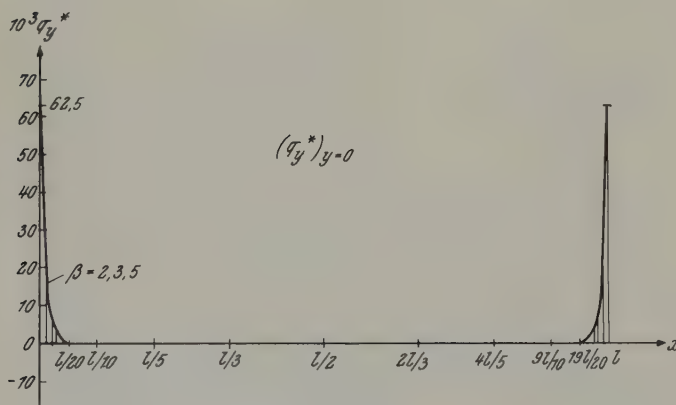
Abb. 20. Die Drillungsmomente  $m_{xy}$ 

Abb. 23. Die Scherkräfte an der Firstkante

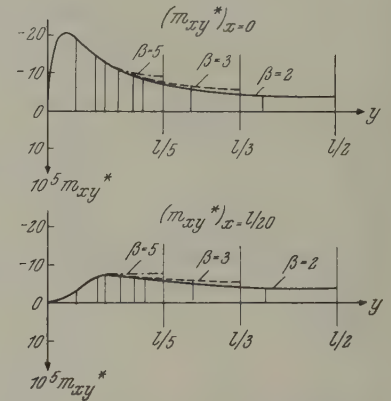
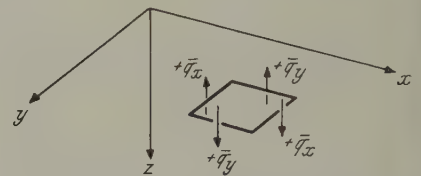
Abb. 21. Die Drillungsmomente  $m_{xy}$ 

Abb. 22. Die positiven Richtungen der Scherkräfte

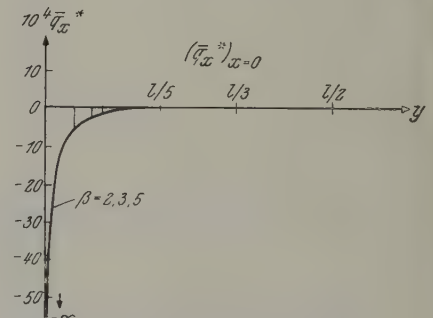


Abb. 24. Die Scherkräfte an der Plattenschmalseite

Aus den angegebenen Momentenbildern und Hauptmomentenlinien erkennt man, daß die größten Biegemomente an der Firstkante auftreten. Sie erreichen parallel und normal zur Firstkante die gleiche Größe und sind fast unabhängig vom Seitenverhältnis der Einzelplatten. Sie erstrecken sich allerdings nur über einen kleinen Bereich, während im restlichen Plattenteil nur geringe Biegewirkungen vorhanden sind. Die Kantenmomente müssen aber bei den vorhandenen Abmessungen vom Werkstoff aufgenommen werden können, da sonst der vorausgesetzte monolithische Zusammenhang an der Kante nicht mehr vorhanden wäre. Setzt man nun eine Ausführung aus

Beton B 225 (dem der angegebene Elastizitätsmodul entspricht) und eine Bewehrung mit Torstahl 40 voraus, so ergibt sich bei einer Plattenstärke von  $\delta = 10$  cm eine nutzbare Höhe von rund 8 cm; damit kann bei einer Sicherheit von 1,70 ein Regelmoment, d. h. das größte Moment unter gleichzeitiger Ausnützung der Stahl- und Betonfestigkeit, aufgenommen werden<sup>6</sup> mit:

$$m_{\text{regel}} = b_0 \left( \frac{h}{k_1} \right)^2 = 100 \cdot \left( \frac{8,0}{7,2} \right)^2 = 123,0 \text{ tcm/m} = 1230,0 \text{ kgm/m}.$$

Das größte auftretende Biegemoment erreicht an der Firstkante in beiden Richtungen den Wert (siehe Momentbilder)

$$10^5 (m_x^*)_{\text{max}} = 10^5 (m_y^*)_{\text{max}} = 105,0 \text{ kgm/m}.$$

Daraus folgt mit  $E = 200\,000 \text{ kg/cm}^2 = 2,0 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2$ ,  $\alpha_t = 1,20 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$  und  $T_0 = 25,0^\circ \text{ C}$

$$(m_x)_{\text{max}} = (m_y)_{\text{max}} = 105,0 \cdot 10^{-5} \cdot 2,0 \cdot 10^9 \cdot 1,20 \cdot 10^{-5} \cdot 25,0 = 630,0 \text{ kgm/m}.$$

Es wird also unter diesen Voraussetzungen

$$m_{\text{regel}} = 1,95 m_{\text{max}}.$$

Die auftretenden Größtmomente können somit ohne Schwierigkeiten durch eine entsprechende Bewehrung aufgenommen werden. In den übrigen Bereichen genügt schon eine konstruktive Bewehrung, um die geringen Biegespannungen aufzunehmen. Die anderen Schnittgrößen sind nur von untergeordneter Bedeutung, da die inneren Kräfte durch die in Richtung der Hauptmomente angeordnete Bewehrung übertragen werden.

Die hier nachgewiesenen Biegewirkungen sind aber wesentlich abhängig von den vorausgesetzten Lagerungsbedingungen. Die dieser Auswertung zugrunde gelegte frei drehbare Lagerung an den Plattenschmalseiten ist eine Idealisierung, die nur selten zutreffen wird. An der Schmalseite wird eine gewisse Einspannwirkung vorhanden sein, da es sich beim Anschluß der Faltwerksplatten an die Binderscheiben streng genommen um eine steife Kante handelt. Im folgenden Abschnitt wird daher der zweite Grenzfall, die volle Einspannung an den Schmalseiten, behandelt.

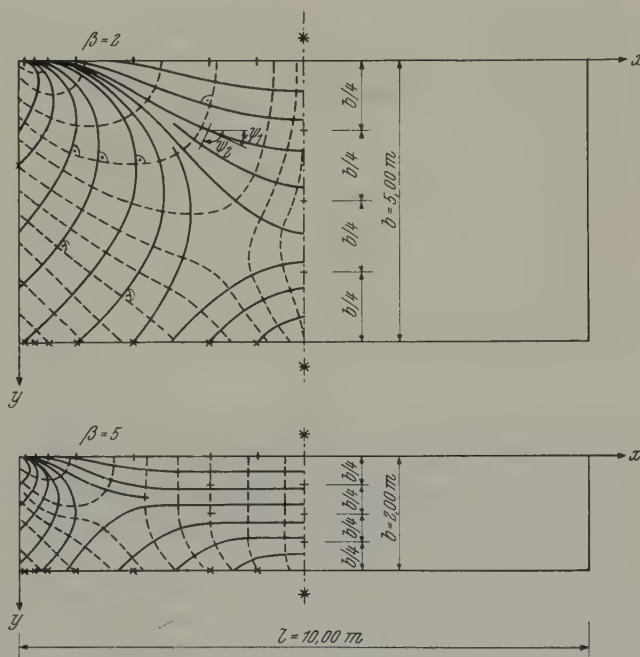


Abb. 25. Hauptmomentenlinien. —  $m_1$ ; - - -  $m_2$ ;

<sup>6</sup> K. Jäger: Die Bemessung der Stahlbetonbauteile nach ÖNORM B 4200, Wien: Manz. 1953.

## V. Die Biegewirkungen bei voller Einspannung der Plattenschmalseiten

### 1. Die allgemeinen Gleichungen

Im Gegensatz zu der im vorhergehenden Abschnitt untersuchten Annahme der freien Drehbarkeit der Platten an ihren Schmalseiten sollen nachfolgend die Beanspruchungen bei voll eingespannten, d. h. unverdrehbaren Plattenschmalseiten untersucht werden. Praktisch wird sowohl die erste Annahme als auch die zweite Annahme nie streng erfüllt sein, sondern die wirkliche Ausführung wird einer teilweisen Einspannung der Einzelplatten in den Binderscheiben entsprechen. Die hier angegebenen Werte liefern somit die beiden Grenzwerte für die auftretenden Beanspruchungen. Die Scheibenspannungen bleiben von diesen geänderten Annahmen unberührt, die übrigen Randbedingungen der Einzelplatten sollen die gleichen wie im Abschnitt IV/1 sein.

Als Ausgangsgleichung gilt wieder die Plattengleichung (13a), nach deren Lösung die Schnittgrößen aus den Gl. (14), (15) und (16) bestimmt werden können. Weiters gelten unverändert die Randbedingungen (17), (18) und (20); statt der Randbedingung (19) gilt jedoch die Randbedingung für die Einspannung an den Schmalseiten, die lautet:

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l: w_1 = 0 \quad (26/1); \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0. \quad (26/2)$$

Außerdem ist noch zu beachten, daß die Beanspruchung und damit die Biegefläche symmetrisch zu  $x = l/2$  sein muß, da das System und die Temperaturverteilung symmetrisch ist. Der Reihenansatz für die Biegefläche, der in diesem Falle am besten aus zwei Anteilen zusammengesetzt wird, lautet:

$$\begin{aligned} w_1 &= \bar{w} + \bar{w} \\ &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} (\bar{A}_n \cos \alpha_n y + \bar{B}_n \alpha_n y \sin \alpha_n y + \bar{C}_n \sin \alpha_n y + \bar{D}_n \alpha_n y \cos \alpha_n y) \sin \alpha_n x + \\ &+ \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_v^2} (\bar{A}_v \cos \alpha_v x + \bar{B}_v \alpha_v x \sin \alpha_v x + \bar{C}_v \sin \alpha_v x + \bar{D}_v \alpha_v x \cos \alpha_v x) \cos \alpha_v y. \end{aligned} \quad (27)$$

Dabei gilt

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}; \quad n = 1, 3, 5, \dots; \quad \alpha_v = \frac{v\pi}{2b}; \quad v = 1, 3, 5, \dots; \quad l = \beta \cdot b.$$

Mit Hilfe der Randbedingung (26/1) und der Symmetriebedingung für die Biegefläche können die Koeffizienten des zweiten Anteiles der Biegefläche wie folgt ermittelt und durch  $\bar{D}_v$  ausgedrückt werden. (Für  $\bar{w}$  sind diese Bedingungen durch die Form des gewählten Ansatzes bereits erfüllt.)

$$\bar{A}_v = 0; \quad \bar{B}_v = -\bar{D}_v \frac{(\cos \alpha_v l + 1)}{\sin \alpha_v l}; \quad \bar{C}_v = \bar{D}_v \frac{\alpha_v l}{\sin \alpha_v l}.$$

Damit lautet dieser Anteil an der Biegefläche:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \frac{\bar{D}_v}{\alpha_v^2 \sin \alpha_v l} [- (\cos \alpha_v l + 1) \alpha_v x \sin \alpha_v x + \alpha_v l \sin \alpha_v x + \\ &+ \sin \alpha_v l \cdot \alpha_v x \cos \alpha_v x] \cos \alpha_v y. \end{aligned} \quad (28)$$

Entsprechend lassen sich auch die Koeffizienten des ersten Anteiles der Gl. (27) mit den Randbedingungen (17) und (20) durch  $\bar{A}_n$  ausdrücken. Dabei wurde aber bereits hier in der Bedingung (20) die Querdehnungszahl mit  $\mu = 0$  eingeführt. (Diese Bedingungen sind für  $w$  schon durch die Wahl des Ansatzes erfüllt.) Daher gelten die Koeffizienten:

$$\bar{B}_n = -\bar{A}_n \frac{\sin \alpha_n b \cos \alpha_n b}{(\sin \alpha_n b \cos \alpha_n b - \alpha_n b)}; \quad \bar{C}_n = -\bar{D}_n = -\bar{A}_n \frac{\cos^2 \alpha_n b}{(\sin \alpha_n b \cos \alpha_n b - \alpha_n b)}.$$



Für den ersten Anteil der Biegefläche folgt daraus der Ausdruck:

$$\bar{w} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\bar{\mathfrak{A}}_n}{\alpha_n^2 (\mathfrak{S} \sin \alpha_n b \mathfrak{C} \cos \alpha_n b - \alpha_n b)} [(\mathfrak{S} \sin \alpha_n b \mathfrak{C} \cos \alpha_n b - \alpha_n b) \mathfrak{C} \cos \alpha_n y - \mathfrak{S} \sin \alpha_n b \mathfrak{C} \cos \alpha_n b \cdot \alpha_n y \mathfrak{S} \sin \alpha_n y + \mathfrak{C} \cos^2 \alpha_n b (\alpha_n y \mathfrak{C} \cos \alpha_n y - \mathfrak{S} \sin \alpha_n y)] \sin \alpha_n x. \quad (29)$$

Die beiden noch unbekannten Koeffizienten  $\bar{\mathfrak{A}}_n$  und  $\bar{\mathfrak{D}}_v$  sind nun aus den Randbedingungen (18) und (26/2) zu bestimmen. Allerdings müssen dazu die Ausdrücke (28) und (29) jeweils in eine Reihe in der anderen Koordinatenrichtung entwickelt werden. Führt man diese Reihenentwicklungen durch und setzt in die Gl. (18) ein dann folgt,

$$(w_1)_{y=0} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \frac{\bar{\mathfrak{A}}_n}{\alpha_n^2} + \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \frac{8 \bar{\mathfrak{D}}_v \alpha_n}{(\alpha_v^2 + \alpha_n^2)^2 l} \frac{(\mathfrak{C} \cos \alpha_v l + 1)}{\mathfrak{S} \sin \alpha_v l} \right] \sin \alpha_n x = \\ = v_0 \operatorname{ctg} \varphi = \frac{2 \kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1) (\mathfrak{C} \cos \alpha_n b - 1)}{\alpha_n^2 (1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{S} \sin \alpha_n b + \alpha_n b)} \sin \alpha_n x. \quad (30)$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\alpha_v/\alpha_n = \frac{v \pi}{2b} \cdot \frac{l}{n \pi} = \frac{v \beta}{2n}$$

gilt, dann ergibt sich damit

$$\bar{\mathfrak{A}}_n + \frac{8}{\pi} \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \frac{\bar{\mathfrak{D}}_v}{n [1 + (v \beta/2n)^2]^2} \cdot \frac{(\mathfrak{C} \cos \alpha_v l + 1)}{\mathfrak{S} \sin \alpha_v l} = - \frac{2 \kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l} \frac{(\mathfrak{C} \cos \alpha_n b - 1)}{(1 + \alpha_n^2/a^2) (\mathfrak{S} \sin \alpha_n b + \alpha_n b)}. \quad (31)$$

Die Randbedingung (26/2) liefert den zweiten Ausdruck in der Form

$$\left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4 \bar{\mathfrak{A}}_n \alpha_n^2}{b (\alpha_n^2 + \alpha_v^2)^2} \frac{(\mathfrak{C} \cos 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{S} \sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\mathfrak{D}}_v (\mathfrak{S} \sin \alpha_v l + \alpha_v l)}{\alpha_v \mathfrak{S} \sin \alpha_v l} \right] \cos \alpha_v y = 0. \quad (32)$$

Mit der oben angeführten Beziehung folgt daraus

$$\frac{4 \beta \mathfrak{S} \sin \alpha_v l}{\pi (\mathfrak{S} \sin \alpha_v l + \alpha_v l)} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \bar{\mathfrak{A}}_n \frac{(v \beta/2n)}{n [1 + (v \beta/2n)^2]^2} \cdot \frac{(\mathfrak{C} \cos 2 \alpha_n b + 1)}{(\mathfrak{S} \sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} + \bar{\mathfrak{D}}_v = 0. \quad (33)$$

Diese beiden Gl. (31) und (33) bilden ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zur Bestimmung von  $\bar{\mathfrak{A}}_n$  und  $\bar{\mathfrak{D}}_v$ . Die Lösung ist nur näherungsweise durch Abbruch des Systems nach einer endlichen Anzahl von Gliedern möglich. Für die praktische Auswertung liefert aber bereits die Berücksichtigung von einigen Gliedern recht gute Ergebnisse. Sind diese Koeffizienten bekannt, dann können damit alle Schnittgrößen bestimmt werden. Für die Biegemomente ergeben sich die Ausdrücke:

$$m_{1x} = K \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \bar{\mathfrak{A}}_n \left[ \mathfrak{C} \cos \alpha_n y - \frac{\mathfrak{S} \sin 2 \alpha_n b}{(\mathfrak{S} \sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} \alpha_n y \mathfrak{S} \sin \alpha_n y + \right. \\ \left. + \frac{(\mathfrak{C} \cos 2 \alpha_n b - 1)}{(\mathfrak{S} \sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} (\alpha_n y \mathfrak{C} \cos \alpha_n y - \mathfrak{S} \sin \alpha_n y) \right] \sin \alpha_n x + \\ + K \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \bar{\mathfrak{D}}_v \left[ \frac{(\mathfrak{C} \cos \alpha_v l + 1)}{\mathfrak{S} \sin \alpha_v l} (\alpha_v x \mathfrak{S} \sin \alpha_v x + 2 \mathfrak{C} \cos \alpha_v x) - \frac{\alpha_v l}{\mathfrak{S} \sin \alpha_v l} \mathfrak{S} \sin \alpha_v x - \right. \\ \left. - \alpha_v x \mathfrak{C} \cos \alpha_v x - 2 \mathfrak{S} \sin \alpha_v x \right] \cos \alpha_v y; \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 m_{1y} = & -K \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \bar{A}_n \left[ \cos \alpha_n y - \frac{\sin 2 \alpha_n b}{(\sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} (\alpha_n y \sin \alpha_n y + 2 \cos \alpha_n y) + \right. \\
 & \left. + \frac{(\cos 2 \alpha_n b - 1)}{(\sin 2 \alpha_n b - 2 \alpha_n b)} (\alpha_n y \cos \alpha_n y + \sin \alpha_n y) \right] \sin \alpha_n x + \\
 & + K \sum_{v=1,3,5}^{\infty} \bar{D}_v \left[ -\frac{(\cos \alpha_v l + 1)}{\sin \alpha_v l} \alpha_v x \sin \alpha_v x + \frac{\alpha_v l}{\sin \alpha_v l} \sin \alpha_v x + \right. \\
 & \left. + \alpha_v x \cos \alpha_v x \right] \cos \alpha_v y.
 \end{aligned} \quad (35)$$

## 2. Numerische Auswertung

Wegen des großen Rechenaufwandes wurden nur die Beziehungen für die Biegemomente an den Plattenrändern für das mittlere Seitenverhältnis von  $\beta = 3$  ausgewertet; sie liefern bereits einen hinreichenden Aufschluß über den Einfluß der Einspan-

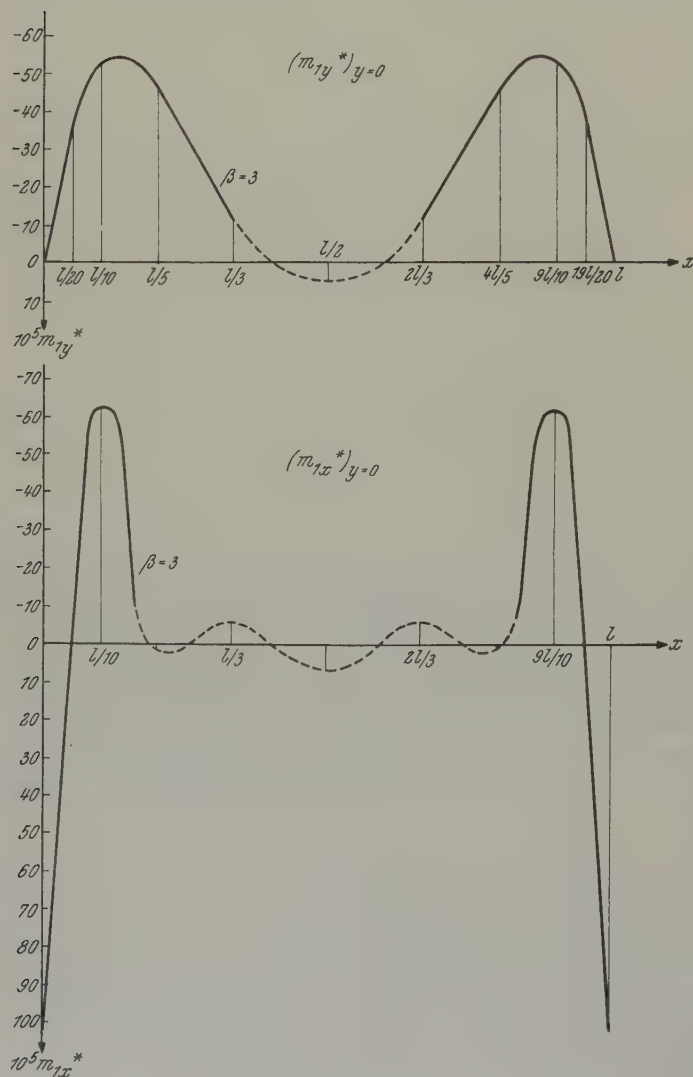


Abb. 26. Die Biegemomente  $m_{1y}$  und  $m_{1x}$  an der Firstkante

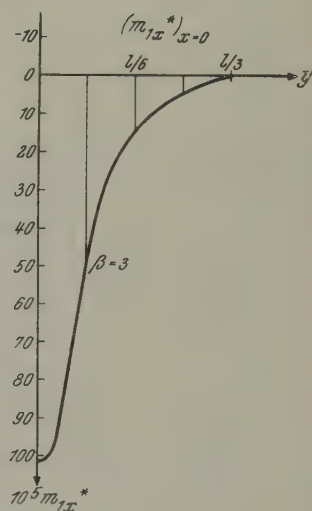


Abb. 27. Die Biegemomente  $m_{1x}$  an der Plattenschmalseite (Einspannmomente)

nung. Eine ausführliche Behandlung aller Schnittkräfte mit Berücksichtigung der Seitenverhältnisse soll einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Als Ausgangswertegelten die gleichen Angaben wie im vorhergehenden Abschnitt. Die Ergebnisse wurden unter Berücksichtigung von 8 Unbekannten der Gl. (31) und (33) ermittelt. Die Auswertung lieferte für die Koeffizienten die Größen:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_1 &= -1,0024 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; & \bar{M}_3 &= -2,4988 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; \\
\bar{M}_5 &= -2,4474 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; & \bar{M}_7 &= -2,2940 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; \\
\bar{D}_1 &= +2,9777 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; & \bar{D}_3 &= +1,4836 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; \\
\bar{D}_5 &= +0,7353 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}; & \bar{D}_7 &= +0,3857 \frac{2\kappa_0 \operatorname{ctg} \varphi}{l}.
\end{aligned}$$

Die damit bestimmten Biegemomente an der Firstkante und an den Plattenschmalseiten sind in den Abb. 26 und 27 dargestellt. (Die Werte der dort strichliert gezeichneten Teile werden bei Verwendung von weiteren Gliedern noch kleiner; sie sind für diese Untersuchung unwesentlich.) Die unter den obigen Voraussetzungen erhaltenen Werte liefern bereits recht gute Ergebnisse und könnten, wie durch Vergleichsrechnungen bestätigt wurde, im Bereich der Plattenschmalseiten, der von größtem Interesse ist, auch durch weitere Glieder kaum wesentlich verbessert werden. Vergleicht man abschließend die Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte, dann sieht man, daß die Einspannung erwartungsgemäß Biegemomente an den Plattenschmalseiten liefert, die fast den gleichen Wert erreichen wie die im Abschnitt IV/2 nachgewiesenen Größtwerte. Andererseits werden aber durch die Einspannung die an der Firstkante auftretenden Biegemomente um etwa 30% vermindert, also in einem günstigen Sinn beeinflusst. Die wirklich auftretenden Beanspruchungen werden zwischen diesen beiden nachgewiesenen Grenzwerten liegen und können bei einer entsprechenden konstruktiven Ausbildung ohne Schwierigkeiten aufgenommen werden.

Bei vielscheibigen Faltwerken werden an den Kanten ebenfalls Beanspruchungen auftreten, die in der gleichen Größenordnung liegen und daher auch dort bei sachgemäßer Ausführung keine Gefährdung der Konstruktion ergeben. Im übrigen wirken diese Spannungen hauptsächlich im Bereich der Binderscheiben, der durch die äußeren Kräfte nur geringere Beanspruchungen als der mittlere Bereich erhält, so daß eine besonders ungünstige Überlagerung von allen Wirkungen in der Regel nicht zu erwarten ist.

(Eingegangen am 29. Juli 1960)

### Karl Federhofer †

Am 6. November 1960, kurz nach Vollendung seines 75. Lebensjahres, verschied em. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. h. c. Dr. rer. nat. E. h. Dr. techn. Karl Federhofer, ehemals Vorstand des Institutes für Technische Mechanik an der Technischen Hochschule in Graz.

Werdegang und Wirken von Prof. Federhofer wurden in dieser Zeitschrift\* anlässlich seines 70. Geburtstages ausführlich geschildert. Federhofer war einer der Großen der Technischen Mechanik. Er hat die von seinem Lehrer und Vorgänger im Lehramt, F. Wittenbauer, begründete Schule fortgeführt und weiter ausgebaut. Seine erstaunliche Vielseitigkeit und Schaffensfreude spiegelt sich in seinen Arbeiten wider. Nicht weniger als sieben Bücher und eine große Zahl von Abhandlungen stammen aus seiner Feder, und es gibt wohl kaum ein Gebiet der Technischen Mechanik, das er nicht durch wesentliche Beiträge gefördert hätte. Eine nachgelassene Arbeit wird in Kürze in dieser Zeitschrift, zu deren Herausgebern er zählte, zum Abdruck kommen.

Federhofer war aber nicht nur ein hervorragender Wissenschaftler, sondern auch ein ausgezeichnete Lehrer, der vielen Generationen von Bau- und Maschineningenieuren eine gediegene Ausbildung in der Technischen Mechanik vermittelt hat. Zu den zahlreichen Ehrungen, die ihm im Laufe seines Lebens zuteil wurden, kam in den letzten

\* Österr. Ing.-Arch. 9, 73 (1955).



Jahren noch die Verleihung des goldenen Ehrenringes der Landeshauptstadt Graz sowie knapp vor seinem Tode die Verleihung des Österreichischen Ehrenzeichens für Wissenschaft und Kunst durch den Herrn Bundespräsidenten.

Im Gedenken seiner Fachkollegen, von denen viele sich zu seinem persönlichen Freundeskreis zählen durften, wird Federhofer weiterleben. *H. Parkus, Wien*

### Ergänzung zum Verzeichnis der Arbeiten\*

#### b) Abhandlungen

123. Zusammenfassende Darstellung der Entwicklung der Statik und Dynamik der Kreiszyinderschalen. *Stahlbau* **14** (1955).
124. Stabilität und Eigenschwingungen der Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke. (Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul) 1955.
125. Zur Kinematik des Schleifkurvengetriebes. *Sitz.Ber. Ak. d. Wiss. Wien* **164** (1955).
126. Einfluß der Baustoffdämpfung und einer äußeren Flüssigkeitsreibung auf die ebenen Biegungsschwingungen eines Kreisringes. *Österr. Ing.-Arch.* **10** (1956).
127. Berechnung der dünnen Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. *Österr. Ing.-Arch.* **11** (1957).
128. Erzwungene Schwingungen eines Kreisringes. *Sitz.Ber. Ak. d. Wiss. Wien* **166** (1957).
129. Erzwungene Schwingungen eines Kreisbogenträgers mit zwei Gelenken bei pulsierender lot-rechter Einzellast. *Sitz.Ber. Ak. d. Wiss. Wien* **167** (1958).
130. Nicht-lineare Biegungsschwingungen des Kreisringes. Festschrift Prof. Grammel zum 70. Geburtstag. Springer-Verlag, Berlin 1959.
131. Die gleichmäßig belastete dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. *Österr. Ing.-Arch.* im Druck.

#### c) Verschiedenes

132. Die Technische Hochschule Graz. Steiermark-Buch 1956.
133. Theodor Pöschl, Nachruf. *Almanach Ak. d. Wiss. Wien* 1956.
134. Ferdinand Wittenbauer. *Österr. Naturforscher, Ärzte und Techniker.* Wien 1957.
135. Über einige in den letzten fünf Jahrzehnten aufgeklärte Denkfehler in der Technischen Mechanik (Abschiedsvorlesung 5. März 1958). Manuskript in der Bibl. d. T. H. Graz.

## Buchbesprechungen

**Die Berechnung der Zylinderschalen.** Von *A. Aas-Jakobsen*. Mit 30 Abb., XII, 160 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Ganzleinen DM 22.50.

Der Verfasser leitet im ersten Kapitel dieses Buches die Grundgleichungen der isotropen Kreiszyinderschalen und der Kreiszyinderschalen mit symmetrischen und exzentrischen Ringrippen ab. Es handelt sich um kein Lehrbuch, dies geht schon daraus hervor, daß z. B. die Kenntnis der Grundannahmen der Schalentheorie vorausgesetzt wird. Kennzeichnend für dieses Buch ist vielmehr die große Anzahl von Zahlentafeln, die einen Überblick vermitteln und die Rechenarbeit vermindern. Durch viele numerisch vollständig durchgearbeitete Beispiele wird auch die Handhabung der Tafeln erläutert. Die theoretischen Untersuchungen, die zur Aufstellung dieser Tafeln führen, sind ebenfalls ausführlich dargestellt.

Besonders bemerkenswert ist das vom Verfasser vorgeschlagene Verfahren zur Berechnung von Tonnendächern. Bei diesem Verfahren, das der Verfasser als „allgemeine Balkentheorie“ bezeichnet, wird die zu behandelnde Schale durch eine „Modellschale“ ersetzt. Diese Modellschale liegt auf den Binderscheiben frei auf und wird für eine Belastung berechnet, die in der Ringrichtung möglichst gut mit der gegebenen Belastung übereinstimmt und in der Längsrichtung eine Sinusverteilung hat. Bei der Lösung des Randwertproblems für die Modellschale werden die Ränder einzeln betrachtet; es wird also angenommen, daß die zugehörigen Formänderungen bis zum gegenüberliegenden Rand abgeklungen sind. Die Formänderungen infolge des Membranspannungszustandes bleiben dabei ebenfalls unberücksichtigt. Die Ringverteilung der so erhaltenen Schnittgrößen wird direkt auf die wirkliche Schale übertragen, während die Längsverteilung mit Hilfe der elementaren Balkentheorie gewonnen wird. Bei diesem Verfahren werden die Gleichgewichtsbedingungen streng, die Formänderungsbedingungen an den Längsrändern aber nur näherungsweise erfüllt. Nach Angabe des Verfassers sind die dabei entstehenden Fehler durchaus tragbar, weil die Schnittgrößen der Modellschale im Gleichgewicht mit der äußeren Belastung sind und die Randbedingungen nur geringen Einfluß auf die Ringverteilung haben.

\* *Österr. Ing.-Arch.* **9**, 73 (1955).

In einem weiteren Kapitel des Buches behandelt der Verfasser ein Näherungsverfahren für Zylinderschalen von nicht kreisförmigem Querschnitt. Die Schalenbewehrung und die Binderscheibeberechnung wird ebenfalls erörtert. Der Verfasser geht überdies in einem Kapitel auf die Stabilitätsuntersuchung ein; die Bestimmung der Eigenwerte für das Ring- und Längsknicken wird besprochen. Die Eigenwerte werden tabellarisch und graphisch für isotrope und für Ringrippenschalen in Abhängigkeit von  $\varrho^2/\lambda^2$  angegeben und die Bemessung der Schalendruckzone wird behandelt. Auf das Problem der vorgespannten Tonnen (Einzeltonne und Reihentonne) wird ebenfalls eingegangen.

Dieses Buch stellt sicher für jeden, der mit der Berechnung derartiger Tragwerke beschäftigt ist, einen wertvollen Behelf dar.

R. Beer, Wien

**Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.** Von A. Duschek und A. Hochrainer.

I. Teil: Tensoralgebra. Vierte ergänzte Auflage. Mit 34 Textabb., VIII., 171 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Steif geheftet S 144.—, DM 24.—, sfr. 24.60, \$ 5.70, £ 2/1/—.

Im Jahre 1946 erschien die erste Auflage dieses dreibändigen Werkes, in dem es die beiden Verfasser in idealer Arbeitsgemeinschaft unternommen haben, erstmals die Tensorrechnung einschließlich ihrer Anwendungen in konsequenter analytischer Schreibweise zu entwickeln. Diese Darstellungsart hat wesentlich zur Vereinfachung des manchmal sehr umständlichen Formel- und Rechenapparates der Tensorrechnung beigetragen und das Werk hat eine weite Wirkung geübt. Vom ersten Band erscheint nunmehr bereits die vierte Auflage, die wegen des inzwischen erfolgten Todes A. Duscheks von A. Hochrainer allein besorgt werden mußte. Die Bearbeitung dieses der Tensoralgebra in euklidischen Räumen gewidmeten Teiles konnte sich im wesentlichen auf kleine Ergänzungen beschränken, die dazu bestimmt sind, die Beziehungen zur sogenannten symbolischen Schreibweise dem Leser vor Augen zu führen, der ja in vielen Lehrbüchern diese Schreibweise findet und dadurch die Möglichkeit hat, sich ohne weiteres auch dort zurechtzufinden.

Einer weiteren Empfehlung dieses bereits allseits anerkannten und immer wieder zitierten Werkes bedarf es nicht.

E. Bukovics, Wien

**Rahmentragwerke und Durchlaufträger.** Von R. Guldán. Sechste, erweiterte Auflage. Aus dem Nachlaß des Verfassers herausgegeben und bearbeitet von H. Reimann. Mit 679 Textabb., 34 Zahlenbeispielen, 96 Zahlen- und Kurventafeln. XXIII, 501 S. Wien: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen S 504.—, DM 84.—, sfr. 86.—, \$ 20.—, £ 7/3/—.

Die hohe Zahl der vorhergehenden unveränderten Auflagen beweist das Ansehen, welches das bekannte Buch schon bisher genoß. Die nun eingefügten Ergänzungen erhöhen seine Verwendbarkeit noch weiter.

Der erste, theoretische Teil bringt eine ausführliche Darstellung des Drehwinkelverfahrens für Rahmentragwerke mit geraden Stäben, also die durch Vernachlässigung der Längskrafteinflüsse (oder deren nachträgliche näherungsweise Berücksichtigung) vereinfachte Deformationsmethode, sowie die Berechnung durchlaufender Träger mittels der Dreimomentengleichungen und des Festpunktverfahrens. Die Ergänzungen betreffen eine durch viele klare Abbildungen erläuterte Darlegung der unverschieblichen und verschieblichen Rahmensysteme sowie Systeme mit gelenkig angeschlossenen Stäben. Die rechnerischen Vorteile bei symmetrisch gestalteten Tragwerken werden eingehend erörtert.

Der zweite Teil, eine Beispielsammlung, wurde durch mehrere instruktive Fälle erweitert. Vielfache Verweisungen zwischen den Beispielen sind lehrreich für Planung und Berechnung. So verdeutlichen einander gegenübergestellte Rahmen und Träger die günstige Wirkung von Vouten, die leider teils aus Unkenntnis dieser Vorteile, meist aber wegen vorgeblicher konstruktiver und schönheitlicher Nachteile oft unausgeführt bleiben. Andere Beispiele finden ihr Gegenstück im Buche des Verfassers über die Cross-Methode und gestatten daher Vergleiche für die Wahl des zweckmäßigsten Berechnungsverfahren.

Die den dritten Teil bildenden Hilfstafeln erleichtern die ziffernmäßige Berechnung; auch sie wurden um solche für Gelenkstäbe und Symmetriestäbe vermehrt.

Die Neuauflage wird besonders bei den Statikern des Stahlbetonbaues beifällig aufgenommen werden, wozu neben der klaren Darstellung vor allem die Tafeln beitragen, die sehr vielseitig verwendet werden können.

W. Mudrak, Graz

**Einführung in die Physik der Leiterwerkstoffe.** Von K. M. Koch und R. Reinbach. Mit einem Geleitwort von W. Köster. (Einführung in die Physik der elektronischen Werkstoffe, Teil II/1.) Mit 144 Abbildungen im Text, 29 Tabellen und 5 Abbildungen, 2 auf Tafeln. VII, 255 S. Wien: Verlag Franz Deuticke. 1960. Ganzleinen S 222.—.

Eine zielbewußte Entwicklungsarbeit über Werkstoffe bestimmter Eigenschaften setzt immer mehr die Kenntnis der modernen Anschauungen von der Natur der Festkörper sowie der diesen



innewohnenden Gesetzmäßigkeiten voraus. Dies gilt in besonderem Maße von den metallischen Werkstoffen, die in der Elektrotechnik Anwendung finden. Die oben genannten Verfasser haben den Versuch gemacht, eine Synthese zwischen dem Grundsätzlichen, also den physikalischen Erscheinungen, der theoretischen Interpretation und dem praktischen Verhalten von technischen Leiterwerkstoffen, herzustellen.

Die Kapitel: Ionenleitung — Elektronenleitung; Leitereigenschaften der Metalle und Legierungen; thermoelektrische Erscheinungen; Einfluß eines Magnetfeldes auf den Leitungsmechanismus sowie der letzte Abschnitt über die Grundzüge der Theorie des Leitungsmechanismus sind vorzugsweise der Darstellung der physikalischen Grundlagen gewidmet, während sich das V. Kapitel mit den Leiterwerkstoffen befaßt. Diese Aufteilung entspricht offenbar jeweils der engeren Thematik der beiden Autoren. Das hat zur Folge, daß keine sehr starke Bezugnahme aufeinander, insbesondere im technischen Teil, geschieht. Nichtsdestoweniger wird Technikern und Ingenieuren, denen es auf die Auswahl von geeigneten Werkstoffen ankommt, Gelegenheit geboten, durch eine flüssige, teilweise großzügige, mit Formeln nicht allzusehr überladene Darstellung in die physikalischen Zusammenhänge einzudringen. Das bezieht sich allerdings in der Hauptsache auf den hier im Vordergrund stehenden Leitungsmechanismus. Eine Stärke dieser Kapitel liegt in der klaren Ausdeutung der Grundversuche.

Auch die heute stark in den Vordergrund gerückten Fragen der thermoelektrischen Erscheinungen und des Hall-Effekts sind recht ausführlich behandelt. Mit Rücksicht auf die zahlreichen Beispiele, die in dem wertvollen Abschnitt der Leiterwerkstoffe gebracht werden, kommt der Aufbau der Metalle und Legierungen etwas zu kurz; der Praktiker dürfte sich hierfür interessieren, weil in diesem Kapitel auch die mechanischen und chemischen Eigenschaften zur Sprache gelangen. Unter Umständen wäre es vorteilhaft, die als Anhang aufscheinende Theorie — nach Meinung der Autoren eine Ergänzung für den anspruchsvollen Leser — zugunsten einer stärkeren Durchdringung der beiden Hauptteile zu opfern.

Der Referent ist sicher, daß die gute Aufnahme des Werkes in weiten Kreisen bald eine zweite Auflage notwendig machen wird, die dieser angezeigten Richtung Rechnung trägt.

Die Ausstattung des Buches ist gut.

H. Nowotny, Wien

**Stationäre Wärmespannungen.** Von H. Parkus. Mit 34 Textabb., V, 166 S. Wien: Springer-Verlag, 1959. Ganzleinen S 288.—, DM 38.—, sfr. 38.90, \$ 9.05, £ 3/4/6.

In Fortsetzung und als Abschluß der mit E. Melan gemeinsam verfaßten „Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder“ behandelt nun der Verfasser in systematischer Darstellung die bei nichtstationären Temperaturfeldern in elastischen, viskoelastischen und elastoplastischen Körpern auftretenden Wärmespannungen.

Nach einem einleitenden Abschnitt über allgemeine Sätze der Thermoelastizität wird an einer Reihe von Beispielen gezeigt, wie man die Wärmespannungen in geometrisch einfachen, elastischen Körpern berechnen kann, falls es sich um Anheiz- oder Abkühlvorgänge handelt. Den periodischen Temperaturänderungen und den bewegten Wärmequellen wird je ein Abschnitt gewidmet. Da bei plötzlicher Wärmeführung die dynamischen Einflüsse nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, werden auch diese in einem eigenen Kapitel behandelt. In praktischen Fällen können jedoch die dynamischen Wirkungen fast durchwegs vernachlässigt werden, da die Temperatur nicht rasch genug geändert werden kann. Das Werk schließt mit der Behandlung der Wärmespannungen bei viskoelastischem und bei elastisch plastischem Verhalten der Werkstoffe, wobei besonders das letzte Kapitel von großer praktischer Bedeutung ist.

Man muß dem Verfasser dankbar sein, daß er die erste Monographie, die über dieses Thema existiert, in so knapper und dabei umfassender Weise zu Ende geführt hat. Die Darstellung ist klar und verständlich und erreicht dabei ein hohes wissenschaftliches Niveau. Das reichhaltige Literaturverzeichnis, das bis 1958 erschienene Arbeiten berücksichtigt, wird allen Interessenten willkommen sein.

G. Heinrich, Wien

**Grundlagen und Praxis der Radartechnik.** Von H. E. Penrose und R. S. H. Boulding. Band I: Prinzipien und Bauelemente. Mit 408 Abb., 4 Taf., 518 S.; Band II: Anlagen und Wellenleitertheorie. Mit 196 Abb., 8 Taf., 352 S. Mit einem Geleitwort von E. Roessler. Übersetzt von H. Rabsilber. Stuttgart: Berliner Union. 1959. Bd. I und II DM 86.—. Subskriptionspreis DM 75.—.

Radar ist in den Jahren seit dem zweiten Weltkrieg zu einem festen Begriff geworden. Jeder, der sich intensiv damit beschäftigt, sollte eigentlich mehrere Spezialgebiete, wie z. B. Antennen-, Mikrowellen-, Impulstechnik usw., beherrschen. Ein Lehrbuch der Radartechnik muß also zwangsläufig all dies dem Leser in gedrängter und doch genügend ausführlicher Form nahebringen — zweifellos eine schwierige Aufgabe für den Autor.



Unter allen Büchern, die sich mit der Radartechnik befassen, nahm das Buch von Penrose und Boulding seit jeher einen besonderen Platz ein. Es behandelt nämlich nicht nur die physikalischen und schaltungstechnischen Grundlagen und deren Anwendung beim Aufbau von Radargeräten, sondern bringt auch ausführliche Besprechungen kommerzieller Radaranlagen, wodurch die Beziehung zur Praxis aufs beste hergestellt ist. Freilich darf man sich andererseits in theoretischer Hinsicht nicht allzuviel erwarten, da die Autoren in jedem Fall mehr auf anschauliche Beschreibung der Vorgänge als auf Theorie Wert legen.

Die vorliegenden zwei Bände stellen eine — übrigens sehr gute — Übersetzung der 5. Auflage dar. Band I behandelt die Prinzipien und Bauelemente, Band II bringt die Besprechung von Radaranlagen und eine Einführung in die Theorie der Wellenleiter.

Das Werk beginnt mit einer kurzen Übersicht über das Wesen von Radar, behandelt dann Entfernungs- und Richtungsbestimmung und geht dann auf die Grundlagen von elektrischen Schaltelementen, Verstärkern und Oszillatoren ein. Der Kathodenstrahlröhre und ihrer Anwendung bei Radar ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Im folgenden werden Verfahren und Schaltungen der Impulstechnik besprochen. Weitere Abschnitte befassen sich mit Höchsfrequenzröhren (wobei dem Magnetron besonderer Raum gewährt wurde), Sendern und Empfängern, Sichtgeräten sowie ausführlich mit Radarantennen. Der erste Band schließt mit einer Besprechung von Prüfmethoden und -geräten für Radaranlagen.

Der zweite Band behandelt vor allem kommerzielle Radaranlagen, wobei das Gebotene jedoch weit über eine bloße Beschreibung hinausgeht. Immer wird, soweit es nötig ist, auch auf Einzelheiten und die ihnen zugrundeliegenden Prinzipien eingegangen. Sehr zu begrüßen ist es, daß die Übersetzer das Werk durch die Beschreibung europäischer Anlagen in wertvoller Weise ergänzt haben. Im zweiten Band findet man außerdem noch eine Einführung in die Leitungstheorie und in die Theorie der Hohlleiter, wobei, wie gesagt, vor allem auf Anschaulichkeit Wert gelegt wird.

Offenbar ist während der Zeit der Übersetzung die 6. Auflage des Originals erschienen. Die dabei von den Autoren vorgenommenen Änderungen und Berichtigungen sind in der deutschen Ausgabe als Anhang enthalten. Auch ein Literaturverzeichnis wurde beigegeben.

Alles in allem ein Werk, das wirklich geeignet ist, den interessierten Leser in kurzer Zeit in das so umfassende Gebiet der Radartechnik einzuführen.

W. Riedler, Wien

**Elementare Schalenstatik.** Von A. Pflüger. Dritte Auflage. Mit 56 Abb., 112 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 19.50.

Dieses Buch hat dank seiner Güte und ausgezeichneten Darstellung des dargebotenen Stoffes innerhalb von zweieinhalb Jahren eine Neuauflage erlebt. Die nunmehr vorliegende dritte Auflage ist gegenüber ihrer Vorgängerin praktisch unverändert geblieben. In übersichtlicher Weise werden hier die Grundtatsachen der Schalentheorie vermittelt. Der Inhalt des Buches bezieht sich nach einer ausführlichen Erläuterung des Begriffes der Schale und der Annahmen und Voraussetzungen für die Berechnung sodann zuerst auf die Membrantheorie der Rotationsschalen, dann auf die Biegetheorie der Rotationsschalen bei drehsymmetrischer Belastung, hierauf folgen die Membrantheorie der auch allgemein geformten Zylinderschalen und die Membrantheorie allgemeiner Schalen. Den Abschluß bildet ein Anhang mit Schrifttumshinweisen und eine Zusammenstellung von wichtigen Lösungen der Membrantheorie.

Das Buch stellt eine sehr schöne Einführung dar, begrenzt weise den Stoff hinsichtlich Umfang und Schwierigkeit und gestattet so dem Studierenden und dem in der Praxis tätigen Ingenieur einen raschen Einblick in das nicht leichte Fachgebiet der Schalentheorie. E. Tschech, Graz

**Grundlagen der Elektrotechnik.** Von E. Philippow. Bücherei der Hochfrequenztechnik: Bd. 7. Mit 457 Abbildungen. 662 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G. 1959. Geb. DM 39.—.

Obwohl, nach dem Vorwort, „die Zusammenstellung des Stoffes keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt“, ist das Werk doch eine sehr ausführliche Darstellung der physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik, die wohl alles enthält, was der Elektrotechniker wissen muß, bevor er sich dem Studium eines Spezialkapitels der Elektrotechnik widmet. In fünf Hauptabschnitten behandelt es das elektrische Feld, den Mechanismus der Stromleitung, das magnetische Feld, das veränderliche Feld und die Wechselströme. Besonders wertvoll ist die eingehende Darstellung der verschiedenen Methoden der Berechnung von elektrostatischen, magnetischen und Strömungsfeldern mit Durchrechnung vieler Einzelfälle und der Unterabschnitt über den elektrischen Strom in linearen Netzen, ein Abschnitt, der in vielen ähnlichen Werken etwas vernachlässigt wird. Im Hauptabschnitt „Der Mechanismus der Stromleitung“ wird die Stromleitung in Metallen, Halbleitern, Elektrolyten und Gasen besprochen, wobei allerdings den Vorgängen im Halbleiter ein etwas knapper Raum zugewiesen ist, ferner der Durchschlag von Isolierstoffen und die Stromleitung im Vakuum als Grundlage für eine kurze Behandlung der Diode und Triode.



Im dritten Hauptabschnitt ist besonders der Abschnitt über die Materie im magnetischen Feld hervorzuheben, wobei den technisch so wichtigen ferromagnetischen Stoffen der gebührende Raum gewidmet und auch über die antiferromagnetischen Stoffe wie die Ferrite berichtet wird; auch der Dauermagnet ist nicht vergessen.

Einen sehr breiten Raum nimmt der Hauptabschnitt „Wechselströme“ ein, in dem von den Grundbegriffen ausgehend, Physik und Technik der Wechselströme ausführlichst behandelt werden, darunter der Transformator, Fourier-Analyse, Ortskurventheorie, Theorie der Vierpole, der Matrizenrechnung, Filter, Theorie der Leitungen und abschließend der Hertzsche Dipol und die Integration der Maxwell'schen Gleichungen.

Das Werk ist systematisch aufgebaut und sehr klar geschrieben; an Mathematik wird nichts weiter vorausgesetzt als die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung; spezielle Rechenverfahren, z. B. in der Theorie der konformen Abbildung oder in der Vierpoltheorie werden in klarer Weise erläutert.

Besonders erfreulich ist es, daß der Verfasser vom Anfang an im Giorgischen Maßsystem arbeitet und damit zeigt, daß sich dieses auch zur Behandlung der Grundgesetze des elektrischen Feldes mindestens ebensogut eignet, wie die sonst verwendeten *cgs*-Systeme; auch kann festgestellt werden, daß in den meisten Fällen die so notwendigen Zählpfeile für die verschiedenen elektrischen Größen eingetragen sind oder die Integrationsrichtung durch Indizes angegeben ist; nur dadurch gewinnen die Gleichungen erst ihren Sinn.

Manchem Leser wird vielleicht auffallen, daß in den grundlegenden Abschnitten die Einführung des Vektors der elektrischen Polarisierung  $\mathfrak{P}$  und des Magnetisierungsvektors  $\mathfrak{M}$  vermieden wird; ich möchte dies jedoch nicht als einen Mangel bezeichnen; für die makroskopische Behandlung der Vorgänge im elektrischen und magnetischen Feld reichen auch die beiden Vektorpaare  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  vollkommen aus; der Physiker allerdings zieht es im Hinblick auf die elektronentheoretische Deutung der Vorgänge im Medium vor, die oben erwähnten Vektoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  einzuführen, wobei dann je ein Vektor der beiden Paare (z. B.  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$ ) den Charakter einer Hilfsgröße erhält. Allerdings wird mit Gl. 1510, S. 368, an Stelle des Vektors der elektrischen Polarisierung  $\mathfrak{P}$  ein Vektor  $\mathfrak{D}'$  eingeführt.

Abschließend seien noch einige Kleinigkeiten erwähnt, die mir beim Studium des Werkes aufgefallen sind. Zunächst zwei sprachliche Unebenheiten: der Ausdruck „eine elektrische Feldstärke nichtelektrischer Natur“, S. 13, kann als ein Schulbeispiel für eine „*contradictio in adjecto*“ angesehen werden; ebenso unglücklich scheint mir der Ausdruck zu sein, daß die Richtung der Kraftlinie „mit der Richtung des Nordpols“ einer im Feld befindlichen Magnetnadel zusammenfällt, S. 245: (Hier ist dem Verfasser einmal der sonst streng verpönte Begriff Magnetpol in die Feder gekommen.)

Nicht einverstanden ist der Berichterstatter mit der Art, wie der Verschiebungsvektor eingeführt wird, S. 9. Als „Feldlinien“ werden hier die Vektorlinien des elektrischen Feldstärkevektors  $\mathfrak{E}$  bezeichnet und den Verschiebungslinien gleichgesetzt, was aber nur im Vakuum richtig wäre, wenn ein elektrostatisches Maßsystem mit  $\epsilon_0 = 1$  verwendet würde. Zu beanstanden ist auch die Gl. 59, S. 15, in der die sogenannte „freie Ladung“ (wahre Ladung  $Q_1$  + Polarisationsladung —  $Q_2$ ) als Quelle des Verschiebungsflusses aufscheint, während in Gl. 63, S. 10, richtig die wahre Ladung  $Q_1$  als diese Quelle eingesetzt ist. In den Gl. 60, 61 und 63 fehlen die den Betrag des Vektors kennzeichnenden Absolutstriche. Merkwürdigerweise wird auf S. 115 als Einheit des Widerstandes an Stelle des absoluten das internationale Ohm eingeführt. Die Skala des in Bild 70, S. 118, dargestellten Hitzdrahtinstrumentes ist nicht linear, sondern angenommen quadratisch. Zu S. 129 wäre zu bemerken, daß die Klemmenspannung im Leerlauf der EMK gegengleich ist. Im Mittel ausdruck der Barkhausen-Formel, Gl. 978, S. 243, fehlt das auch durch Gl. 971 geforderte negative Vorzeichen. In Gl. 1739, S. 405, muß es heißen  $U_{ba}$  statt  $U_{ab}$ .

Die angeführten kleinen Mängel können den Wert des Werkes nicht mindern, es kann vielmehr gesagt werden, daß das Werk eine wertvolle Bereicherung der elektrotechnischen Literatur darstellt; es ist systematisch aufgebaut, sehr klar geschrieben und kann als ein nicht nur lesenswertes, sondern besonders studienwertes Buch bezeichnet werden, das jedem Elektrotechniker, aber auch jedem Physiker, der sich mit elektrotechnischen Problemen befassen muß, bestens empfohlen werden kann.

O. Franke, Wien



*Soeben erschien:*

# Die Gasturbine

Ihre Theorie, Konstruktion und Anwendung für stationäre Anlagen,  
Schiffs-, Lokomotiv-, Kraftfahrzeug- und Flugzeugantrieb

Von

**Dipl.-Ing. J. Kruschik**

Oberingenieur der Rich. Klinger Aktiengesellschaft, Gumpoldskirchen bei Wien

Unter Mitarbeit von

**Dipl.-Ing. E. Hüttner**

Simmering-Graz-Pauker Aktiengesellschaft, Wien

**Zweite, vollkommen neubearbeitete und erweiterte Auflage**

Mit 663 Abbildungen im Text und auf Tafeln, 97 Tabellen und 9 Rechentafeln  
XIV, 874 Seiten. 4°. 1960. Ganzleinen S 1488.—, DM 248.—, sfr. 253.90, \$ 59.05

Der gute Anklang, den die erste Auflage dieses Buches gefunden hat, hat sowohl den Autor als auch den Verlag ermutigt, die zweite Auflage in wesentlich erweiterter Form herauszubringen. Durch die Erweiterung ist praktisch ein neues Buch entstanden, das das Gesamtgebiet der Gasturbine bis ins Detail behandelt.

Folgende Abschnitte sind neu aufgenommen worden: Die Thermodynamik der Strahlurbine, die Thermodynamik des Freikolbengaserzeugers mit Turbine, sein Aufbau und die verschiedenen Ausführungsformen, Berechnung und Konstruktion von Axial- und Radialverdichtern und -turbinen, Berechnung und Konstruktion von Wärmeaustauschern, Festigkeitsberechnung, die Gasturbine im Zusammenhang mit Atomreaktoren und die kombinierten Gas-Dampf-Prozesse.

Vollständig überarbeitet und wesentlich erweitert wurde der Abschnitt Thermodynamik, Brennstoffe, Brennkammern und Brennstoffsysteme, das Verhalten der verschiedenen Schaltungen, Werkstoffe, der geschlossene Kreisprozeß, Gasturbinen für Industrie und Hüttenwesen, Schiffsgasturbinen, Gasturbinenlokomotiven, Kraftfahrzeugturbinen und Flugzeugturbinen. Mit dieser kompletten Neubearbeitung wird dieses Standardwerk jetzt auch in größerem Format herausgebracht, wobei gleichzeitig die Abbildungszahl auf 663 und die Tabellenzahl auf 97 gestiegen ist. Auf den nunmehr rund 900 Seiten wird das Gesamtgebiet in ausführlicher und klarer Form behandelt. Zahlreiche Schnittbilder, zum Teil auf Ausschlagtafeln in Großformat, ergänzen den Text. Jeder einschlägige Industriebetrieb und jeder Ingenieur, der heute mit Wärme und Energie zu tun hat, wird dieses Buch brauchen, aber auch sämtliche technischen Mittel- und Hochschulen werden es in ihrer Bibliothek haben müssen.

---

*Vom gleichen Autor erschien:*

## **Luft- und Gastafeln zur Berechnung von Gasturbinen und Verdichtern.**

Mit 21 Abbildungen im Text und auf 17 Tafeln. IV, 7 Seiten. 4°. 1953.

Steif geheftet S 69.—, DM 11.40, sfr. 11.60, \$ 2.70

„Mit diesem Buch stellt der Verfasser für im Gasturbinenbau vorkommende thermodynamische Berechnungen brauchbare Rechentafeln zur Verfügung; auch der im Verdichterbau Tätige wird mit Nutzen zu diesem Werk greifen. Es enthält in der ersten und umfangreichsten Tafel in einer vom Rechenschieber her geläufigen Form drei Skalen nebeneinander, die den Zusammenhang zwischen der Temperatur, dem Wärmeinhalt und der relativen Druckfunktion der reinen Luft in einem so großen Maßstab zeigen, daß auf drei Stellen genau abgelesen und die vierte Stelle gut abgeschätzt werden kann. Der Einfluß von Feuchtigkeit und von Verbrennungsgas wird durch Korrekturwerte berücksichtigt. Die Turbinen- und Verdichtertafeln werden durch Hilfskurven für Wärmeübertrager und Verbrennungsrechnungen ergänzt. Tafeln der spezifischen Wärme bei konstantem Druck sowie der Adiabatenexponenten verschiedener Gase, ferner der Molekulargewichte von Verbrennungsgasen bei verschiedenen Wasserstoff/Kohlenstoff- und Luftgehalten beschließen die nützliche, mit Sorgfalt aufeinander abgestimmte und gut ausgestattete Tafelsammlung. Die Beschreibung und vor allem die für die Einarbeitung günstig gewählten Beispiele erleichtern die Anwendung der Tafeln.“

*VDI-Zeitschrift*

---

**Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung**



*Neuerscheinungen:*

**Bericht über den X. Internationalen Astronautischen Kongreß.** London 1959.

Herausgegeben von W. von Braun, A. Eula, B. Fraeijs de Veubeke, F. Hecht, W. B. Klemperer, J. M. J. Kooy, F. I. Ordway III, E. Sängner, K. Schütte, L. I. Sedov, L. R. Shepherd, J. Stemmer. Schriftleitung: F. Hecht. Mit 464 Figuren. I. Teilband: XIII, Seite 1–504, II. Teilband: II, Seite 505–946. Gr.-8°. 1960. Ganzleinen S 1380.—, DM 230.—, sfr. 235.50, \$ 54.75  
Vorzugspreis für Mitglieder der an die IAF angeschlossenen Gesellschaften und für Bezieher der „Astronautica Acta“: Ganzleinen S 1104.—, DM 184.—, sfr. 188.40 \$ 43.80

**Vorlesungen über höhere Mathematik.** Von Dr. phil. Adalbert Duschek, weiland o. Professor an der Technischen Hochschule Wien.

Erster Band: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 169 Textabbildungen. X, 440 Seiten. Gr.-8°. 1960.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, \$ 10.70  
Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

Dritter Band: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Zweite, mit Berichtigungen versehene Auflage. Mit 107 Textabbildungen. XII, 512 Seiten. Gr.-8° 1960.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, \$ 10.70  
Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

Lieferbar ist der zweite Band: Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie. Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 136 Textabbildungen. VIII, 401 Seiten. Gr.-8°. 1958.

S 270.—, DM 45.—, sfr. 46.10, \$ 10.70  
Ganzleinen S 288.—, DM 48.—, sfr. 49.10, \$ 11.45

**Mechanik der festen Körper.** Von Heinz Parkus, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 191 Textabbildungen. VIII, 264 Seiten. Gr.-8°. 1960.

Steif geheftet S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, \$ 6.20  
Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, \$ 6.90

**Linear Programming in Industry.** Theory and Application. An Introduction. By Sven Danø, Assistant Professor of Economics University of Copenhagen. With 6 figures. VIII, 120 pages. Gr.-8°. 1960.

Steif geheftet S 120.—, DM 20.—, sfr. 20.50, \$ 4.75

**Druckstollenbau.** Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Kleser, beh. aut. Zivilingenieur für Bauwesen, Bregenz. Mit 135 Textabbildungen. X, 218 Seiten. Gr.-8°. 1960.

Ganzleinen S 324.—, DM 54.—, sfr. 55.30, \$ 12.85

**Die Talsperren Österreichs.** Schriftenreihe. Herausgegeben von der Österreichischen Stau-  
beckenkommission und dem Österreichischen Wasserwirtschaftsverband Wien. Schriftleitung:  
Prof. Dr. Hermann Grengg.

Heft 11: Beobachtungen an der Hiersmannsperre. Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Ernst Fischer.  
Mit 13 Textabbildungen. IV, 38 Seiten. Gr.-8°. 1960. Rotaprint.

Steif geheftet S 30.—, DM 5.—, sfr. 5.10, \$ 1.20

**Kulturgeschichte des technischen Zeichnens.** Von Ing. Alois Nedoluha, Wien.

Mit 136 Abbildungen, 6 Farbbildern und 4 Tafeln. VII, 201 Seiten. Gr.-8°. 1960. (Erweiterter Sonderabdruck aus den Heften 19/1957, 20/1958, 21/1959 der „Blätter für Technikgeschichte“, herausgegeben vom Technischen Museum für Industrie und Gewerbe in Wien. Forschungsinstitut für Technikgeschichte.)

Ganzleinen S 150.—, DM 25.—, sfr. 25.60, \$ 5.95

**Fortschritte der Chemie organischer Naturstoffe.** Herausgegeben von L. Zechmeister, California Institute of Technology, Pasadena.

Band XVIII: Mit 65 Abbildungen. X, 600 Seiten. Gr.-8°. 1960.

S 594.—, DM 99.—, sfr. 101.40, \$ 23.55  
Ganzleinen S 618.—, DM 103.—, sfr. 105.50, \$ 24.50

**Betriebswirtschaftslehre und Verkehrswissenschaft.** (Versuch einer Abgrenzung.)

Von Hochschuldozent Dr. Karl Lechner, Wien. 95 Seiten. 8°. 1960.

Steif geheftet S 90.—, DM 15.—, sfr. 15.40, \$ 3.55

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung